

Electromagnetismo

Manuel Pulido
Departamento de Física,
Universidad Nacional del Nordeste
`pulido@unne.edu.ar`

30 March 11

Contenidos

1	Revisión de conceptos de análisis vectorial	2
1.1	Vectores	2
1.2	Transformación lineales. Transformación de vectores bajo rotaciones	5
1.3	Campos y operadores diferenciales	5
1.4	Integración en varias variables	7
1.4.1	Identidades de Green	9
1.5	Función delta de Dirac	11
2	Electrostática	12
2.1	Ley de Coulomb y principio de superposición	12
2.2	Concepto de campo	13
2.3	Ecuaciones de Maxwell	13
2.4	Estática	15
2.5	Solución del problema electrostático. Caso sin fronteras	17
2.5.1	Carga puntual	17
2.5.2	Campo eléctrico producido por una distribución de carga arbitraria. Solución general sin fronteras	20
2.5.3	Unicidad de la solución caso sin fronteras: Teorema de Helmholtz .	22
2.6	Solución general del problema electrostático. Caso con condiciones de con- torno	22
2.6.1	Unicidad de la solución	23
2.6.2	Solución general del problema. Función de Green	24
2.7	Energía potencial electrostática	26
2.7.1	Energía requerida para formar una distribución de carga	27
2.7.2	Energía potencial de N cargas en el vacío	28

Capítulo 1

Revisión de conceptos de análisis vectorial

Realizamos un repaso de identidades y conceptos del cálculo vectorial que nos serán de utilidad, necesidad, durante el curso de Electromagnetismo. Como referencia del tema se puede utilizar el Capítulo 1 del Griffiths.

1.1 Vectores

Si pensamos en vectores en $\mathbb{R}^3$ y los representamos en una base particular

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1.1)$$

cuyas componentes estan expresadas en las coordenadas cartesianas.

En general a un vector en $\mathbb{R}^3$ lo podemos expresar en función de una base $\{\hat{u}_i\}$ cualquiera

$$\vec{A} = A_1 \hat{u}_1 + A_2 \hat{u}_2 + A_3 \hat{u}_3 \quad (1.2)$$

notar que el vector $\vec{A}$ es independiente de la base, sin embargo su expresión en componentes $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ si depende de la base.

Las bases que vamos a utilizar serán conformadas por vectores ortogonales y de modulo unidad $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ o $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$. A los vectores de modulo unidad los llamamos versores y los denotamos por el sombrerito.

Notación de Einstein. Se utiliza para ahorrar notación, todo doble índice lo interpretamos como una suma, y por lo tanto podemos obviar el símbolo de la suma (la sigma), es decir

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{u}_i = A_i \hat{u}_i. \quad (1.3)$$

Esto también permite trabajar facilmente en dimensiones arbitrarias por ejemplo en $\mathbb{R}^n$. Se asume que la suma recorre todas las dimensiones del espacio donde estamos trabajando, si es en $\mathbb{R}^3$ irá de 1 a 3.

Suma de vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} = A_i \hat{u}_i + B_i \hat{u}_i = (A_i + B_i) \hat{u}_i \quad (1.4)$$

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\alpha \vec{A} = \alpha (A_i \hat{u}_i) = (\alpha A_i) \hat{u}_i \quad (1.5)$$

Producto interno. Es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Sean dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$ en $\mathbb{R}^3$ el producto interno de estos vectores se define por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \hat{u}_i \cdot B_j \hat{u}_j = A_i B_j \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = A_i B_i \quad (1.6)$$

donde hemos aplicado la propiedad distributiva quedando una doble suma y luego usamos la ortonormalidad de la base $\{\hat{u}_i\}$,

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.7)$$

Definimos a la delta Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.8)$$

luego podemos expresar el producto interior de los vectores por

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}. \quad (1.9)$$

Notar que el resultado del producto interior de dos vectores es un escalar.

Módulo o norma de un vector. La norma de un vector es la raíz cuadrada del producto interno del vector por si mismo

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_i^2}. \quad (1.10)$$

Nota: Para la función módulo de un vector que es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ utilizamos el símbolo $|\cdot|$. Esta función es distinta de la utilizada para el módulo de un escalar aun cuando la denotemos con el mismo símbolo.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}| |\vec{B}| \quad (1.11)$$

La igualdad vale para el caso en el que los vectores sean paralelos o antiparalelos. En este caso si $\hat{u}_A$ es el versor en la dirección de $\vec{A}$, entonces podemos expresar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como

$$\vec{A} = |\vec{A}| \hat{u}_A, \quad \vec{B} = |\vec{B}| \hat{u}_A \quad (1.12)$$

El producto interior de los vectores es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \hat{u}_A \cdot \hat{u}_A = |\vec{A}| |\vec{B}| \quad (1.13)$$

El otro caso extremo es para $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, en este caso los vectores son ortogonales.

En general se tiene que

$$\cos \phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \quad (1.14)$$

donde ϕ es el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Entonces, en forma geométrica independiente de la base, el producto interior se puede expresar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \phi. \quad (1.15)$$

Producto vectorial El producto vectorial de dos vectores en la base $\hat{u}_i$ viene dado por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - B_2 A_3) \hat{u}_1 + (B_1 A_3 - B_3 A_1) \hat{u}_2 + (A_1 B_2 - B_1 A_2) \hat{u}_3 \quad (1.16)$$

Como forma mnemotécnica para el cálculo se utiliza

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

El producto vectorial se puede expresar en forma compacta usando el tensor de Levi-Civita quedando definido por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i A_j B_k \quad (1.18)$$

El tensor tridimensional anti-simétrico de Levi-Civita viene definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } (123) \\ 0 & \text{si se repite el índice} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } (123) \end{cases} \quad (1.19)$$

Permutaciones pares son 123, 231, 312. Mientras las permutaciones impares son 321, 132, 213. Como regla mnemotécnica se puede utilizar

$$\text{sgn}(\epsilon_{ijk}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Las propiedades del producto vectorial son

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}), \quad (1.21)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \times \vec{B}) \vec{C}, \quad (1.22)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}), \quad (1.23)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (1.24)$$

Este último producto triple es el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores. Este volumen da 0 si dos de los vectores son paralelos entre sí.

1.2 Transformación lineales. Transformación de vectores bajo rotaciones

Un tensor afin T de rango 2 es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si misma, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, especificada por una matriz real de 3×3 , T_{jk} dada por

$$\tilde{\vec{A}} = T \vec{A} \quad (1.25)$$

en componentes vale que

$$\tilde{A}_j = (T \vec{A})_j = T_{jk} A_k. \quad (1.26)$$

Ejemplo. Cuando queremos realizar una rotación de los ejes, ¿cómo quedará expresado el vector en un nuevo sistema de coordenadas rotado?. En primera medida cabe recordar que los vectores no se transforman, lo que cambia son las componentes en la base rotada.

Supongamos que rotamos los ejes de coordenadas $x - y$ en un ángulo ϕ la transformación de las componentes del vector $\vec{A}$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

1.3 Campos y operadores diferenciales

Definimos el operador vectorial (un bicho que se come funciones escalares o vectoriales) por

$$\nabla = \hat{u}_i \partial_{u_i}. \quad (1.28)$$

Si aplicamos el operador a una función escalar lo que tenemos es un vector gradiente. Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector lo que tenemos es la divergencia, mientras que si lo aplicamos a través del producto vectorial a un vector lo que tenemos es el rotor.

Gradiente Si aplicamos el operador nabla a un función escalar $\phi(\vec{x})$ lo que obtendremos es un campo vectorial definido por

$$\nabla \phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{u}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{u}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{u}_3. \quad (1.29)$$

Esta definición es dependiente de las coordenadas que se utilizan, una definición independiente es

$$\vec{A} \cdot \nabla \phi(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\phi(\vec{x} + \epsilon \vec{A}) - \phi(\vec{x})] / \epsilon \quad (1.30)$$

para todo vector $\vec{A}$ en $\mathbb{R}^3$.

El gradiente de ϕ en un punto $\vec{x}$, apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función ϕ en $\vec{x}$. Es decir apunta hacia la cima, mientras $-\nabla \phi$ apunta hacia el valle. La magnitud del vector nos da la razón de crecimiento de la función escalar.

Divergencia Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector tenemos una función escalar definida por

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A} &= (\hat{u}_i \partial_{u_i}) \cdot (A_j \hat{u}_j) \\
 &= \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \partial_{u_i} A_j \\
 &= \delta_{ij} \partial_{u_i} A_j \\
 &= \partial_{u_i} A_i
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

La divergencia es una medida de como el campo vectorial sale/diverge del punto en cuestión, esta estrechamente relacionada a la integral de superficie, en una pequeña superficie cerrada que rodea al punto, cualquier diferencia en esta superficie entre los campos salientes y entrantes serán interpretados como una divergencia o convergencia del campo vectorial.

Las fuentes (líneas salientes de un punto) tienen divergencia positiva, los sumideros (líneas congruentes a un punto) divergencia negativa.

?

Faltan graficos

Rotor El rotor proviene de la aplicación del operador nabla a través del producto vectorial a un campo vectorial, el cual da como resultado un vector dado por

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{x}) = \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Reglas de la derivación En general para demostrar las reglas de derivación del análisis vectorial se trata de escribir en componentes y utilizar los resultados del cálculo de una variable. De gran utilidad es la notación de Einstein.

Ejemplos.

(a)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \partial_{u_i} (\phi A_i) \\
 &= \partial_{u_i} \phi A_i + \phi \partial_{u_i} A_i \\
 &= \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado que la derivada del producto es el producto de las derivadas en 1D.

(b)

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times (\phi \vec{A})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k) \\
 &= \epsilon_{ijk} [\partial_j \phi A_k + \phi \partial_j A_k] \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_j \phi A_k + \phi (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) \\
 &= (\nabla \phi \times \vec{A})_i + \phi (\nabla \times \vec{A})_i
 \end{aligned}$$

donde hemos usado derivada de un producto, para luego realizar distributiva y finalmente asociar a rotores los términos resultantes.

1.4 Integración en varias variables

Integral de línea. Integral de un campo vectorial a lo largo de un camino, esta puede ser entre dos puntos a y b , $\int_a^b \vec{V} \cdot d\vec{l}$ o a lo largo de un camino cerrado $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$.

Si el campo vectorial es conservativo la integral de línea es independiente del camino.

Integral de superficie Integral de un campo vectorial en una superficie, $\int_S \vec{V} \cdot d\vec{s}$ donde $d\vec{s}$ es un vector normal a la superficie que apunta hacia afuera de ésta.

Teorema fundamental de Gauss o de la divergencia Si tenemos un volumen V en $\mathbb{R}^3$ que es cerrado y acotado con borde S suave y $\vec{A}$ es un campo vectorial en V que es continuamente diferenciable, entonces

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.33)$$

La integral de la divergencia de un campo vectorial en un volumen es igual a la integral del campo vectorial en la superficie que encierra a dicho volumen.

En general, la integral de superficie es el flujo del campo vectorial a través de la superficie, y puede ser expresado por

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{u}_n ds = \oint_S A_n ds \quad (1.34)$$

donde $\hat{u}_n$ es el versor normal saliente de la superficie y A_n es la componente del campo vectorial en la dirección normal saliente.

El flujo eléctrico saliente de una superficie esta relacionado a la divergencia del campo eléctrico en el interior. El flujo saliente de un fluido incomprensible es igual a la cantidad de fluido que se esta inyectando dentro del volumen.

La suma de las divergencias en todos los puntos adentro del volumen se cancelarán y solo me quedarán las contribuciones de la superficie.

Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada, cerrada y acotada con borde Γ suave y $\vec{V}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en una region que contiene a S y su frontera entonces

$$\int_S \nabla \times \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (1.35)$$

la integral de línea puede ser expresada por

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} v_t dl \quad (1.36)$$

donde v_t es la componente tangencial a la curva Γ , y la integral de línea se interpreta como la *circulación* del campo vectorial a lo largo de la curva cerrada Γ .

El teorema se puede pensar como que: la suma de pequeños vórtices ubicados en la superficie S es igual a la circulación en la curva cerrada que encierra a la superficie. En el caso en que $\nabla \times \vec{V} = 0$ en S (el rotor es 0 para todo punto de S), entonces el campo es irrotacional, y esta libre de vórtices.

Campo vectorial conservativo. Si el campo vectorial $\vec{V}$ puede ser expresado como $\vec{V} = \nabla\phi$ entonces ϕ es el potencial del campo vectorial y se dice que $\vec{V}$ es conservativo.

Corolario 1. Los campos vectoriales conservativos son irrotacionales. Supongamos existe una ϕ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$, entonces tenemos que el campo conservativo satisface $\nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla\phi = 0$. Por lo que un campo vectorial conservativo es irrotacional.

Corolario 2. Para campos conservativos las integrales de línea entre dos puntos son independientes del camino. Demostremos este enunciado. Sea la integral de línea entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a lo largo de una curva Γ_1 que va entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si elegimos otra curva entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, Γ_2 entonces la integral

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} - \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.37)$$

donde ambas curvas Γ_1 y Γ_2 se interpretan desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$, por lo que para la integración desde $\vec{b}$ hasta $\vec{a}$ se realiza con signo positivo. Además en la segunda igualdad de (1.37) se usó el teorema de Stokes y luego en la tercera igualdad se usó que $\nabla \times \vec{V} = 0$ (Corolario 1). Entonces tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (1.38)$$

Notar que para que valga este resultado el rotor del campo debe ser 0 en *toda* la superficie comprendida entre Γ_1 y Γ_2 .

El lector se preguntará entonces si vale la afirmación inversa, ¿todo campo vectorial irrotacional será conservativo? la respuesta es no siempre, solo para el caso en el que la región donde el campo es irrotacional sea simplemente conexa. Como contraejemplo, supongamos un toro o donut/rosquilla de Homero, en ese caso no tenemos garantizado si la integración es por fuera de la donut que el campo sea conservativo.

En el caso en que la región sea simplemente conexa vale el teorema siguiente:

Teorema Si $\nabla \times \vec{V} = 0$ en una región simplemente conexa V donde $\vec{V}$ es continuamente diferenciable, entonces para $\vec{p}$ en V , la integral de línea

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{x}} \vec{V} \cdot d\vec{s}, \quad (1.39)$$

es independiente de la curva que une a $\vec{p}$ con $\vec{x}$ y se puede definir un potencial de $\vec{V}$ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende de ϕ .

Esta claro ahora que si tenemos un campo vectorial que está libre de vórtices en una región simplemente conexa, entonces podemos aplicar el razonamiento inverso, es decir en la región interna a la de las curvas Γ_1 y Γ_2 *todo* punto del campo vectorial será irrotacional y por lo tanto la integral de línea cerrada es 0 de lo cual se deduce que las integrales de línea entre los dos caminos Γ_1 y Γ_2 son iguales. En el caso en que el dominio en el que el campo sea irrotacional no sea simplemente conexo no tenemos garantía que la integral cerrada se anule.

Ahora supongamos que tenemos un campo vectorial que existe un campo vectorial $\vec{A}$ tal que el campo $\vec{V}$ se puede escribir de la forma $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$ luego se deduce que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, *el campo es solenoidal*. Vale la pregunta inversa también en este caso, ¿será que todo campo vectorial solenoidal se puede escribir como el rotor de un campo vectorial? La respuesta es equivalente al anterior planteo. Si la región V donde se cumple que el campo es solenoidal tiene la propiedad que cualquier superficie cerrada en S encierra un volumen cuyos puntos son todos pertenecientes a la región V entonces vale, es decir el campo vectorial solenoidal puede ser escrito como un rotor de otro campo vectorial.

1.4.1 Identidades de Green

Si proponemos al campo vectorial dado por dos funciones escalares ϕ, ψ :

$$\vec{A} = \phi \nabla \psi \quad (1.40)$$

Luego reemplazamos esta expresión en el teorema de la divergencia:

$$\int \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \nabla \psi \cdot \hat{n} ds \quad (1.41)$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie.

Expandiendo la primera integral en (1.41) obtenemos:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \partial_n \psi ds \quad (1.42)$$

donde $\partial_n \psi$ es la derivada de ψ en la dirección normal a la superficie.

La ecuación (1.42) es conocida como la primera identidad de Green.

La segunda identidad de Green se obtiene a partir de aplicar la primera identidad de Green a $\vec{A} = \phi \nabla \psi$ y a $\vec{A} = \psi \nabla \phi$, en este último caso la primera identidad de Green se lee

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV = \oint_S \psi \partial_n \phi ds \quad (1.43)$$

Restando (1.42) menos (1.43) resulta la segunda identidad de Green:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S (\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi) ds \quad (1.44)$$

Teorema de Helmholtz Si $\vec{V}$ es un campo vectorial continuamente diferenciable del cual conocemos su divergencia y su rotor y éstos se van a 0 en el infinito (al menos como r^{-3}), entonces, este campo vectorial queda univocamente determinado cuando especificamos su divergencia y su rotor.

Demostración. Demostremos que el campo $\vec{V}$ lo podemos descomponer y escribir como la suma de un campo solenoidal y de un campo irrotacional $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \quad (1.45)$$

Entonces si encontramos a la función escalar ϕ y además encontramos al campo vectorial $\vec{A}$ hemos logrado la descomposición.

Si aplicamos la divergencia a (1.45) tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \phi \quad (1.46)$$

es decir que si tenemos como dada a $\nabla \cdot \vec{V}$, debemos determinar la ϕ que satisface la ecuación de Poisson. La ϕ se determina de

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} dV' + \oint_S \left[\phi \partial_n(r^{-1}) - \frac{\partial_n \phi}{r} \right] ds' \quad (1.47)$$

donde $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Esta solución se puede encontrar utilizando la segunda identidad de Green, en la cual se toma una función escalar como ϕ y la segunda función escalar como $\psi = 1/r$. Ver Ejercicio.

En un problema sin condiciones de contorno la superficie S puede ser pensada como una esfera cuyo radio tiende a ∞ como tenemos que $\nabla \cdot \vec{V} \rightarrow r^{-3}$ para $r \rightarrow \infty$ entonces $\phi \rightarrow r^{-1}$ para $r \rightarrow \infty$. La integral de superficie se anula (sin embargo si es importante para cuando tenemos condiciones de contorno). Luego se tiene que

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} dV' \quad (1.48)$$

Ahora pasamos a la demostración de la existencia de $\vec{A}$, aplicando $\nabla \times$ a la expresión (1.45) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{aligned} \quad (1.49)$$

como $\vec{A}$ esta determinada a menos de un gradiente, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$, manteniendose el mismo rotor $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$, entonces podemos elegir a ψ tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Supongamos que $\nabla \times \vec{A} \neq 0$, luego se tiene que $\nabla \cdot (\vec{A}' + \nabla\psi) = \gamma$, Entonces puedo resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 \psi = \gamma$, encontrando a ψ y por lo tanto vale que $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$.

Luego la ecuación resultante es

$$\nabla \times \vec{V} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (1.50)$$

pero estas son tres ecuaciones de Poisson, entonces bajo los mismos argumentos podemos encontrar que

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{V}}{r} dv \quad (1.51)$$

Entonces por un lado hemos demostrado que existen ϕ y $\vec{A}$ tal que el campo vectorial lo puedo descomponer en (1.45) por otro lado hemos demostrado que si conocemos a $\nabla \cdot v$ y $\nabla \times \vec{V}$ podemos determinar a $\vec{V}$.

Este resultado es de fundamental importancia en electrostática donde tendremos especificado la divergencia y el rotor del campo eléctrico y a partir de estos determinaremos al campo. Notar que la demostración realizada aquí, asume un dominio no acotado y totalmente abierto. Mas adelante durante el curso veremos el caso general a dominios con condiciones de contorno.

1.5 Función delta de Dirac

Es una función impropia que tiene las siguientes propiedades,

- (a) $\delta(x - a) = 0$ si $x \neq a$
- (b) $\int \delta(x - a)dx = 1$ si la región de integración contiene al punto a y es 0 si no lo contiene.

Dadas estas dos propiedades la delta de Dirac es clasificada como una distribución o función generalizada. Puede ser pensada como el límite de funciones cuyo ancho disminuye mientras su altura crece acordeamente tal que el área integrable se conserve.

Algunas propiedades derivables importantes de la delta:

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a)$
- (b) $\int f(x)\delta'(x - a)dx = -f'(a)$
- (c) $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$ k una constante.
- (d) $\delta(f(x)) = \sum_i \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|^{-1} \delta(x - x_i)$ donde x_i son las raíces de $f(x)$.
- (e) $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)dk$

Ejemplo.

Si $k > 0$ entonces propongo como cambio de variables $y = kx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y)dy/k \\ &= f(0)/k \end{aligned} \tag{1.52}$$

Si $k < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)dx &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(y/k)\delta(y)dy/k \\ &= -f(0)/k. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Capítulo 2

Electrostática

2.1 Ley de Coulomb y principio de superposición

Si tenemos dos cargas q_1 y q_2 existirá una interacción eléctrica entre estas cargas que produce una fuerza de la forma

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21} \quad (2.1)$$

donde r_{12} es la distancia entre las dos cargas, y $\hat{r}_{21}$ es la dirección entre las cargas desde la carga q_2 hacia la carga q_1 , $\vec{F}_1$ es la fuerza que siente la carga q_1 . Esta es la famosa ley de Coulomb y explica la interacción eléctrica estática entre cargas, fue propuesta a partir de numerosas observaciones de fenómenos eléctricos y ha sido extensivamente corroborada. En particular la dependencia con la inversa del cuadrado a la distancia r^{-2} , siendo el exponente -2 una expresión muy precisa, es decir se ha corroborado el exponente -2 experimentalmente con numerosos decimales.

¿Que sucede si ahora introducimos una tercera carga q_3 en el sistema? ¿Cual es la fuerza que sentirá q_1 ? Si solo estan las cargas q_1 y q_2 tenemos la expresión (2.1). Si ahora solo tenemos en el sistema a las cargas q_1 y q_3 entonces tendremos una expresión similar a (2.1),

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{31}. \quad (2.2)$$

¿Podemos suponer que la fuerza total que se le ejerce es la suma de $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{13}$? ¿Es decir existen interacciones eléctricas entre las cargas q_2 y q_3 que puedan alterar la fuerza que se ejerce sobre q_1 cuando q_2 y q_3 actúan juntas sobre q_1 ?

La respuesta es no hay efectos secundarios, ni interacciones, y se puede asumir que las cargas actúan independientemente. En efecto este es un principio muy general en el electromagnetismo, denominado *principio de superposición*, y ha sido evaluado y comprobado en numerosas situaciones experimentales. De aquí en más asumimos la validez de este principio en el electromagnetismo y toda la teoría electromagnética se construye en base a este. Expresado de otra manera el principio de superposición, nos dice que los

efectos electromagnéticos o los campos eléctricos y magnéticos van a ser lineales. Veamos entonces a que nos estamos refiriendo por *campos*.

2.2 Concepto de campo

Supongamos que queremos aislar los efectos que produce una distribución de cargas de la distribución de carga en sí, incluso podrían existir dos distribuciones de carga que produzcan el mismo efecto por lo que nuestro interés es olvidarnos de la distribución de cargas y concentrarnos solamente en los efectos que éstas producen.

Si ponemos una carga de prueba en una posición arbitraria dentro de un sistema que contiene una distribución de carga, la carga de prueba sentirá los efectos eléctricos de la distribución de carga de tal manera que la distribución de carga le realizará una fuerza a la carga de prueba dada por

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.3)$$

donde $\vec{E}(\vec{x})$ es el efecto de la distribución de carga en la posición $\vec{x}$ donde ubicamos a la carga q .

Entonces podemos definir el campo eléctrico en el punto $\vec{x}$ por

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.4)$$

La carga de prueba debe ser lo suficientemente pequeña como para que no altere los efectos del campo eléctrico existente.

¿Por que es de tanta importancia el concepto de campo?

- Dos distribuciones de cargas distintas pueden producir exactamente los mismos efectos.
- Los campos electromagnéticos pueden existir en regiones donde no hay cargas. Los campos pueden incluso transportar momento y energía y pueden existir aun en el vacío.
- Todos los procesos electromagnéticos pueden ser tratados a través del campo eléctrico y magnético.

2.3 Ecuaciones de Maxwell

Vamos a establecer las ecuaciones que gobiernan los procesos electromagnéticos, denominadas ecuaciones de Maxwell, estas ecuaciones en principio las tomaremos como un conjunto de postulados, a pesar que por supuesto han sido derivadas a través numerosos esfuerzos observacionales y teóricos.

Sea una distribución de carga $\rho(\vec{x})$ y una densidad superficial de corriente $\vec{J}(\vec{x})$ que están en el vacío, las ecuaciones que gobiernan los campos electromagnéticos son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{J} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío y μ_0 es la permitividad en el vacío. La velocidad de la luz en el vacío viene dada por $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$.

- ρ es la densidad de carga volumétrica es decir tiene unidades de carga por unidad de volumen. En general la denominaremos distribución de carga.
- $\vec{J}$ es la densidad superficial de corriente, tiene unidades de carga por unidad de tiempo y superficie.

Las ecuaciones (2.5)-(2.8) son las ecuaciones de Maxwell que nos determinan los campos eléctricos y magnéticos y su evolución en el tiempo. Las incógnitas son las 3 componentes del campo eléctrico, $\vec{E}$, y las tres componentes del campo magnético, $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de 8 ecuaciones, las cuales por supuesto no son todas linealmente independientes (dado que existen solo 6 incógnitas, si fueran linealmente independientes entonces el sistema no tendría solución), de las 8 ecuaciones solo 6 son linealmente independientes.

Se debe notar que los términos fuentes, términos no-homogéneos de las ecuaciones, es decir aquellos que son generadores de los campos son:

- La distribución de cargas ρ/ϵ_0
- La distribución de corrientes $\mu_0\vec{J}$

Estos términos son los datos, son prescripciones del problema y actúan como las fuentes de los campos. También el problema debe explicitar las condiciones de contorno, en el caso que se requiera la solución en un dominio acotado. Si el problema es en el espacio libre, en $\mathbb{R}^3$ se pide que la densidad y corrientes sean acotadas, es decir que decaigan a 0 en el infinito (ver Teorema de Helmholtz en el capítulo 1).

Las ecuaciones de Maxwell son lineales en las variables incógnitas $\vec{E}$ y $\vec{B}$, esto significa que una superposición lineal de soluciones es también solución, que por supuesto esto está basado en el principio de superposición.

Los términos de las variaciones temporales de los campos, (2.6) y (2.7) son los que acoplan las ecuaciones, notar que las variaciones temporales del campo eléctrico producen campo magnético (2.6) y viceversa (2.7).

No existen cargas magnéticas (monopolos), razón por la cual el término no-homogéneo en la ecuación del divergencia del campo magnético es nulo.

La conservación de la carga esta implícita en las ecuaciones de Maxwell, (2.5)-(2.8), en efecto si aplicamos el operador divergencia a (2.6),

$$-\epsilon_0 \partial_t \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{J} \quad (2.9)$$

Si usamos (2.5) y reemplazamos en (2.9), se tiene

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.10)$$

Esta es la expresión general de la conservación de la carga, si integramos en un volumen, lo que obtenemos es que

$$\partial_t Q + \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.11)$$

donde $Q = \int_V \rho dV$ y se ha usado el teorema de Gauss. Esta expresión (2.11) nos dice que los cambios de la carga total que esta localizada en el volumen V se deben unicamente al flujo de cargas que atravieza la superficie S (contorno de V). Es decir, que si tenemos un flujo entrante de cargas positivas la carga total encerrada aumentará, mientras una salida de carga disminuirá la carga neta total localizada dentro del volumen. Esta es la única posibilidad de variación de la carga a través del transporte, pero no pueden ni aparecer ni desaparecer, solo transportarse de un lugar a otro.

En el caso que también exista en el espacio un campo magnético, la fuerza que se ejerce sobre la carga viene dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.12)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la carga y $\vec{B}$ es el campo magnético. Ésta expresión es conocida por *fuerza de Lorentz*.

La expresión de la fuerza de Lorentz es discutida en el marco general del electromagnetismo con la relatividad espacial y existen expresiones alternativas como la ley de Einstein-Laub que es una generalización de la de Lorentz. Para una discusión de este aspecto ver un trabajo reciente sobre el tema, Mansuripur (2012)¹

2.4 Estática

Si la distribución de cargas y corrientes son independientes del tiempo, éstas producirán campos eléctricos y magnéticos que son independientes del tiempo es decir los términos de las ecuaciones $\partial_t \vec{E}$ y $\partial_t \vec{B}$ se anulan y por lo tanto las ecuaciones se reducen a:

¹Mansuripur, 2012: Trouble with the Lorentz law of force: Incompatibility with special relativity and momentum conservation, *Physical Research Letters*, **108**, 193901.

cuatro ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.14)$$

y cuatro para el campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

La conclusión mas importante que se puede deducir es que los campos eléctricos y magnéticos están desacoplados para el caso estático. Esta es la razón por la cual históricamente los fenómenos eléctricos se consideraban de una naturaleza independiente de los fenómenos magnéticos hasta que los experimentos de Faraday con corrientes que variaban en el tiempo permitieron comprender que ambos fenómenos en el fondo estaban ligados intrínsecamente.

La primera parte de esta materia la dedicaremos a estudiar la electrostática es decir aquellos fenómenos que están gobernados por las ecuaciones (2.13) y (2.14).

El teorema de Helmholtz nos garantiza que si se especifica la divergencia de un campo vectorial y el rotor de ese campo es posible determinar el campo unívocamente si el campo cumple ciertas condiciones de decaimiento lejos de las distribuciones de carga r^{-2} . Alternativamente se pide que la divergencia del campo decaiga como r^{-3} .

La resolución de problemas de electrostática se suele simplificar a través de la introducción de un potencial eléctrico esto es una función escalar Φ que esta definida por:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (2.17)$$

donde entonces por su propia definición se verifica que

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla\Phi = 0 \quad (2.18)$$

esto es cualquier potencial eléctrico, dada la forma en que lo definimos satisface trivialmente la ecuación de rotor del campo igual a 0.

De esta manera la única ecuación que debería satisfacer el potencial es (2.13) reemplazando en esta ecuación la definición 2.17 se obtiene:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (2.19)$$

Esta es la conocida ecuación de Poisson. Si la distribución de cargas es nula se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.20)$$

en este caso para que la solución no sea la trivial deberían existir condiciones de borde que deba satisfacer el campo eléctrico, las cuales discutiremos mas adelante.

Notar que la definición del potencial eléctrico nos permite una fuerte simplificación del problema electrostático, de hecho pasamos de tener 3 variables incógnitas (E_x, E_y, E_z) a tener que resolver una ecuación solo para Φ . Esto se debe a que estas variables no son independientes por lo que con determinar una sola función escalar Φ ya es posible determinar las tres componentes del campo eléctrico. La restricción que nos permite pasar de tres variables a una sola variable incógnita es el hecho que el campo es irrotacional. Esta restricción son tres ecuaciones de las cuales solo dos son linealmente independientes.

2.5 Solución del problema electrostático. Caso sin fronteras

Queremos encontrar el campo eléctrico para un sistema compuesto por una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ en el espacio abierto y no existen condiciones de contorno.

Todo lo que conocemos es que el campo eléctrico debería satisfacer

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.22)$$

2.5.1 Carga puntual

Supongamos que tenemos una carga puntual q ubicada en el origen, proponemos como ansatz que el campo eléctrico de la carga puntual es:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (2.23)$$

La densidad de carga de una carga puntual es:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}) \quad (2.24)$$

Tratemos ahora de demostrar que efectivamente (2.23) es la solución. Si (2.23) satisface la ecuación de la divergencia (2.21), se tiene que

$$\nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x}) \quad (2.25)$$

por lo que deducimos se debe demostrar que:

$$\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = 4\pi\delta^3(\vec{x}). \quad (2.26)$$

En coordenadas esféricas la divergencia de un campo vectorial $\vec{V} = V_r\hat{u}_r + V_\theta\hat{u}_\theta + V_\phi\hat{u}_\phi$ se expresa como:

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi V_\phi \quad (2.27)$$

Luego para $r > 0$ se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^{-2}) = 0 \quad (2.28)$$

Sin embargo en el origen la función $\frac{\hat{r}}{r^2}$ no está acotada. Si integramos alrededor del origen con una esfera de radio R , además usando el teorema de Gauss (el cual es válido para $r > 0$) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{V_R} \nabla \cdot \vec{V} dV &= \int_{S_R} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

Luego hemos demostrado que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{x}) \quad (2.31)$$

Entonces interpretando este resultado a la luz del electromagnetismo, en particular de la ecuación (2.21), se tiene que una densidad de carga dada por una carga puntual en el origen: $\rho = 4\pi\epsilon_0 \delta^3(\vec{x})$ genera un campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{x}}{r^3}. \quad (2.32)$$

Continuemos por el próximo caso mas simple posible; una carga puntual ubicada en $\vec{x}_0$, la distribución de carga correspondiente a la carga puntual se puede escribir en la forma:

$$\rho(\vec{x}) = q \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.33)$$

Es decir que las ecuaciones resultantes son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = q/\epsilon_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.34)$$

Ya hemos demostrado que $\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = \delta^3(\vec{x})$ es decir ya conocemos que la divergencia del campo $\hat{x}/|\vec{x}|^2$ nos da la función delta de Dirac. Dejamos como ejercicio su generalización a un caso relativo a $\vec{x}_0$.

Ejercicio 2.1: Extender el resultado al caso relativo a un vector $\vec{x}_0$: $\nabla \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^3 = 4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ donde el ∇ representa la derivada con respecto a $\vec{x}$.

Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio, y multiplicando al campo $(\vec{x} - \vec{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^3$ por q/ϵ_0 podemos proponer como solución del campo eléctrico a:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\hat{x} - \hat{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 \quad (2.35)$$

por construcción entonces esta ecuación cumple con la primera ecuación de la electrostática (2.21), ¿cumplirá con las otras tres, (2.22), es decir este campo libre de vórtices?

Ejercicio 2.2: Demuestre que $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) = -\frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$.

Dado el ejercicio 2.2 aplicamos el rotor:

$$\nabla \times \vec{E} = q/(4\pi\epsilon_0) \nabla \times \nabla \left[\frac{\hat{x} - \hat{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right] \quad (2.36)$$

Dado que el rotor de un gradiente es siempre 0 (ejercicios) se tiene que el campo eléctrico encontrado satisface:

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.37)$$

Entonces la solución del campo eléctrico de una carga puntual es la dada por (2.35). Si en esta solución ponemos el origen del sistema de coordenadas en donde se ubica la carga resulta que el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2}. \quad (2.38)$$

Claramente las líneas del campo son entrantes/salientes a la carga.

El ejercicio 2.2 nos permite determinar el potencial eléctrico de una carga puntual, definamos al potencial eléctrico por $\vec{E} = -\nabla\Phi$, entonces

$$-\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) \quad (2.39)$$

Entonces a menos de una constante aditiva el potencial eléctrico de una carga puntual viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (2.40)$$

Si tenemos una carga de prueba q_p inmersa en el campo generado por la carga generadora del campo q (2.38), se tiene que la fuerza que se ejercen entre si, de (2.3) y (2.38) es dada por

$$\vec{F} = q_p \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_p \frac{\hat{x}}{r^2} \quad (2.41)$$

esta es la conocida ley de Coulomb que nos da la fuerza que se ejercen dos cargas puntuales. La dirección $\hat{x}$ debería ser interpretada como la dirección que liga a las cargas, desde la carga q a la carga q_p (interpretamos que $\vec{F}$ es la fuerza que se ejerce sobre q_p), mientras r es la distancia entre las cargas. Ver sección 2.1 para mas detalles sobre la ley de Coulomb.

Hemos demostrado entonces que la ley de Coulomb esta de acuerdo con las ecuaciones de electrostática. También es interesante desarrollar el camino inverso, partiendo de la ley de Coulomb llegar a las ecuaciones de electrostática. Se deja como ejercicio para el lector motivado.

Demostración utilizando el teorema de Gauss

Si integramos en un volumen arbitrario a la ec. (2.21) resulta

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho dV. \quad (2.42)$$

En el lado derecho de esta ecuación (2.42) tenemos la integral en volumen de la densidad volumétrica de carga, por lo que esta es la carga total encerrada en el volumen V la cual denotaremos por Q .

Aplicando ahora el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la ecuación (2.42) resulta que

$$\int_V \vec{E} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0^{-1} Q \quad (2.43)$$

este es el resultado conocido en electromagnetismo como el teorema de Gauss. Una lectura física de este teorema nos dice que el flujo de campo eléctrico en una superficie cerrada esta *absolutamente* determinado por la carga encerrada en dicha superficie. El campo en V es totalmente independiente de las cargas externas a la superficie.

Asumamos que tenemos como volumen una superficie esférica S de radio R alrededor de la carga con centro en la carga luego:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot d\vec{s} &= |\vec{E}| R^2 \int d\Omega \\ &= |\vec{E}| 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Entonces, el módulo del campo eléctrico de una carga puntual q viene dado por

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2. \quad (2.45)$$

Dadas las características del teorema de Gauss, las líneas de superficie del campo eléctrico deben ser entrantes o salientes a una carga puntual de lo contrario el campo podría depender de las cargas externas. Entonces la dirección del campo es $\hat{r}$ (versor de coordenadas esféricas, saliente del origen).

Luego el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2 \hat{r}. \quad (2.46)$$

2.5.2 Campo eléctrico producido por una distribución de carga arbitraria. Solución general sin fronteras

Para generalizar el resultado obtenido en (2.38) utilizamos el principio de *superposición lineal*, es decir si existen varias cargas el campo eléctrico solución será la suma de los campos producidos por cada una de las cargas por separado. Supongamos que el lugar de

observación es $\vec{x}$ y la ubicación de las N cargas q_i es $\vec{x}_i$ entonces el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \quad (2.47)$$

En el caso que tengamos una distribución de cargas continuas la suma pasa a ser una integral en volumen y $q_i \rightarrow \rho dV$,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' \quad (2.48)$$

donde $\vec{x}'$ es la posición de la carga infinitesimal $\rho(\vec{x}')dV'$, la integración se realiza en $\vec{x}'$. En general a la posición $\vec{x}'$, la llamaremos punto fuente, ya que es donde se ubican las cargas que son generadoras del campo eléctrico. Mientras $\vec{x}$ es el lugar donde se mide el campo eléctrico y es un vector fijo a los fines de la integración. A $\vec{x}$ en este contexto lo llamaremos el punto observación.

La ecuación (2.48) es la *solución general del problema electrostático para cualquier distribución de cargas sin condiciones de contorno*. Dada la distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ se puede obtener el $\vec{E}$ a través de (2.48) que por construcción satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de la electrostática (2.21) y (2.22).

Si se quiere determinar el potencial eléctrico de una distribución de cargas arbitraria nuevamente utilizamos el resultado del ejercicio 2.2, $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$, para expresar el campo eléctrico en la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.49)$$

donde se ha usado que el operador ∇ es la derivada en $\vec{x}$, y por lo tanto independiente de la integral que se realiza en la variable $\vec{x}'$.

Luego dada la definición del potencial $\vec{E} = -\nabla\Phi$ se determina que

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.50)$$

este potencial queda definido a menos de una constante, sin embargo dado que estamos en un problema sin CCs se suele tomar como potencial en el infinito $\Phi = 0$ lo que determina esta constante. De todas maneras nótese que lo único físico aquí es el campo eléctrico $\vec{E}$ por lo que el potencial es solo una metodología de resolución por el momento y aun no tiene significado físico.

Si quisiéramos demostrar que (2.50) satisface la ecuación de Poisson. Apliquemos a esta ecuación el operador laplaciano:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.51)$$

Como ya hemos visto $\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$

Recordando que $\int_V f(\vec{x}')\delta(\vec{x} - \vec{x}')dV' = f(\vec{x})$ resulta

$$\nabla^2\Phi = -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (2.52)$$

Entonces reobtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (2.53)$$

2.5.3 Unicidad de la solución caso sin fronteras: Teorema de Helmholtz

Un campo vectorial puede ser determinado unívocamente si se especifican su divergencia y su rotor en el espacio libre. Es decir si conocemos que el campo vectorial $\vec{F}$ debe satisfacer:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \psi \quad (2.54)$$

y que

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{C} \quad (2.55)$$

Sin embargo necesitamos algo mas de información, es necesario pedir que el campo vaya a 0 en el infinito es decir lejos de las cargas.

El Teorema de Helmholtz dice que: Si la divergencia $\psi(\vec{x})$ y el rotor $\vec{C}(\vec{x})$ de un campo vectorial $\vec{F}(\vec{x})$ son especificados y si estos van a 0 mas rápidamente que r^{-2} cuando $r \rightarrow \infty$, y si el campo $\vec{F}(\vec{x})$ va a 0 cuando $r \rightarrow \infty$ entonces $\vec{F}$ es determinado unívocamente. La demostración de este teorema esta en el capítulo 1. Este teorema es de aplicacion directa en problemas de electrostática y debe tenerse presente.

El próximo paso es determinar que condiciones de contorno necesitamos imponer para un caso en que el dominio del problema, el cual asumimos simplemente conexo, este limitado a alguna superficie cerrada.

2.6 Solución general del problema electrostático. Caso con condiciones de contorno

Hasta el momento, entonces, hemos encontrado la solución general para el problema sin condiciones de contorno en la vida real los problemas suelen estar en volúmenes finitos con especificación de condiciones de contorno en dicho volumen. Por ejemplo cuando se trabaja dentro de una caja de Faraday donde las condiciones de contorno quedan especificadas a través de un potencial constante (o cero por convención) en la caja.

Para trabajar con condiciones de contorno necesitamos pensar en dos aspectos:

1. ¿Qué condiciones de contorno se deben exigir tal que la solución del problema sea única? Si uno especifica menos condiciones de contorno de las requeridas las soluciones serían infinitas si se sobre-especifican puede no haber ninguna solución.
2. Desarrollar un método de resolución para problemas que contengan los efectos de las condiciones de contorno.

2.6.1 Unicidad de la solución

Por el momento proponemos el tipo de condiciones de contorno que resultan razonables y luego demostraremos que efectivamente éstas son las condiciones de contorno que imponen una solución única al problema electrostático.

Si estamos resolviendo un problema en Φ que satisface la ecuación de Poisson, (2.19), lo que proponemos es:

- Condición de Dirichlet: conocemos al potencial Φ en la superficie cerrada que encierra el dominio.
- Condición de Neumann: Se especifica la derivada normal del potencial eléctrico en la superficie, este es el campo eléctrico en la superficie. Esto podría ser interpretado como dar una densidad de carga superficial tal que genere la derivada normal del potencial eléctrico.

Demostremos la unicidad del problema con condiciones de Dirichlet reduciendo el argumento contrario al absurdo, es decir propongamos que existen dos soluciones para terminar demostrando que la única posibilidad es que estas sean exactamente iguales.

Sean Φ_1 y Φ_2 dos soluciones a la ecuación de Poisson, (2.19), con condiciones de contorno de Dirichlet, e.g. $\Phi_1 = V_1(\vec{x})$ en S . Consecuentemente definimos una función que es la diferencia de las dos soluciones $\Psi = \Phi_2 - \Phi_1$ luego la ecuación diferencial que satisface Ψ en el interior de V es:

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (2.56)$$

cuya condición de contorno en S , debe ser $\Psi = 0$. Desde luego estamos ante un problema donde no existen fuentes en el interior y por otro lado la condición de contorno es la trivial, luego se trata de demostrar que en este caso la función Ψ debe ser idénticamente nula en todo el interior y por lo tanto no pueden existir dos soluciones distintas.

De la primera identidad de Green eligiendo ambas variables, ψ y ϕ como Ψ se tiene

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S \Psi \partial_n \Psi ds \quad (2.57)$$

dadas las condiciones de contorno de Dirichlet $\Psi = 0$ en S . Por otro lado también sabemos que $\nabla^2 \Psi = 0$ luego resulta que

$$\int_V |\nabla \Psi|^2 dV = 0 \quad (2.58)$$

pero entonces el único Ψ que puede satisfacer esta integral es que $\nabla\Psi = 0$ luego se tiene que Ψ es una constante adentro de V pero dado que las condiciones de contorno son que $\Psi = 0$ esa constante tiene que ser el 0. Finalmente hemos determinado que:

$$\Phi_1 = \Phi_2. \quad (2.59)$$

La solución del problema con condiciones de Dirichlet es por lo tanto única.

Este resultado nos indica que si hubiéramos pedido condiciones de Cauchy, es decir, exigiendo valores de Φ y $\partial_n\Phi$ arbitrarios en S no existe solución. Si tenemos un dado Φ y elegimos un valor arbitrario de $\partial_n\Phi$ que no corresponde al Φ especificado entonces no existirá una solución para tal problema (ya que con solo elegir una de las dos condiciones el problema ya tiene solución única).

2.6.2 Solución general del problema. Función de Green

El problema que queremos resolver es encontrar el potencial eléctrico Φ que satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = \rho(\vec{x})/\epsilon_0 \quad (2.60)$$

sujeto a condiciones de Dirichlet o Neumann en el contorno del dominio.

En el caso de resolución del problema sin condiciones de contorno, léase con condiciones de contorno en el infinito, el método que utilizamos para encontrar la solución fue primero encontrar la solución del problema de una carga puntual. Luego para el problema de una distribución de cargas, utilizamos una superposición lineal, es decir la solución del problema consistió en sumar las soluciones de cada una de las carguitas puntuales que componen la distribución de carga y de esta forma encontramos la solución general del problema sin condiciones de contorno para una distribución de cargas arbitraria. ¿Podemos extender este método de resolución al caso con condiciones de contorno?

Este es efectivamente el método de la función de Green, encontrar la solución del problema diferencial de una carga puntual y luego proponer una superposición lineal de cargas puntuales para encontrar la distribución de carga arbitraria dada.

Para encontrar la solución utilicemos la segunda identidad de Green con $\phi = \Phi(\vec{x}')$ y con $\psi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$, donde la variable de integración es $\vec{x}'$ y $\vec{x}$ es una constante, reemplazando en la segunda identidad

$$\int_V \left[\Phi \nabla_{\vec{x}'}^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \left(\frac{\nabla_{\vec{x}'}^2 \Phi}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right] dV' = \int_S \left[\Phi \partial_n' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{\partial_n' \Phi}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] ds' \quad (2.61)$$

Reemplazando $\nabla_{\vec{x}'}^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, y (2.19) se tiene que

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} dV' - \int_{S'} \left[\Phi \partial_n' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{\partial_n' \Phi}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] ds' \right\}, \quad (2.62)$$

donde se ha usado la propiedad de la delta de Dirac y obtenido el potencial en función de una densidad arbitraria y de las condiciones de contorno en la superficie que rodea nuestro volumen, sin embargo la expresión que hemos obtenido *no* es consistente con la variables que son prescritas para el problema en realidad lo que es prescrito es $\rho(\vec{x})$ en el volumen y las condiciones de contorno son Φ ó $\partial_n \Phi$ en S pero nunca ambas a la vez como hemos demostrado en la sección anterior, por lo que esto *no* puede ser considerada la solución del problema (ya que tenemos parte de la incognita en el lado derecho de la ecuación (2.62).

La aplicación de la segunda identidad si nos deja una enseñanza en lugar de tomar a la variable $\psi = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ deberíamos especificar una función $G(\vec{x}, \vec{x}')$ tal que por un lado tenga la propiedad clave:

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.63)$$

pero además sería importante que si lo que estamos resolviendo es un problema de Dirichlet la función de Green, $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$, satisfaga la condición de contorno: $G_D = 0$ en S de tal manera que se anule el término donde se debería especificar la derivada normal del potencial en (2.62).

Entonces apliquemos la segunda identidad de Green para las funciones $\phi = \Phi$ y $\psi = G(\vec{x}, \vec{x}')$,

$$\int_V [\Phi \nabla_{\vec{x}'}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') - (\nabla_{\vec{x}'}^2 \Phi G(\vec{x}, \vec{x}'))] dV' = \int_S [\Phi \partial'_n G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \partial'_n \Phi] ds'. \quad (2.64)$$

Resolviendo de la misma manera que en el caso anterior obtenemos

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} G(\vec{x} - \vec{x}') dV' - \int_S [\Phi \partial'_n G(\vec{x} - \vec{x}') - G(\vec{x} - \vec{x}') \partial'_n \Phi] ds' \right\} \quad (2.65)$$

en el caso de condiciones de contorno de Dirichlet resulta que

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} G_D(\vec{x} - \vec{x}') dV' - \int_S [\Phi \partial'_n G_D(\vec{x} - \vec{x}')] ds' \right\} \quad (2.66)$$

la función de Green de Dirichlet nos permite eliminar el problema que existía en las condiciones de contorno, ahora solo es necesario contar con el potencial Φ en la superficie el cual es efectivamente especificado. Es decir (2.66) es la solución general para un problema de condiciones de contorno de Dirichlet.

Interpretación de la función de Green La expresión de la solución general esta sujeta a determinar la función de Green la cual es la solución de un problema de Poisson para una carga puntual de carga $q = -4\pi\epsilon_0$ con condiciones de contorno triviales $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ sin embargo estas son para $\vec{x}'$ en S . Es decir hemos convertido el problema de densidad de carga con condiciones de contorno de Dirichlet en S en un problema de una carga puntual con condiciones de contorno de Dirichlet triviales. (Aun cuando el problema es mas simple que el original no siempre este puede ser resuelto, en particular si las condiciones de contorno involucran geometrías complicadas).

Para condiciones de contorno de Neumann se debe notar que no podemos tomar $\partial'_n G_N(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ ya que si integramos en un volumen la ecuación diferencial para la función de Green (2.63) resulta

$$\int_V \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') dV' = -4\pi \int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (2.67)$$

Usando el Teorema de la divergencia resulta que

$$\oint_S \partial'_n G ds' = -4\pi \quad (2.68)$$

es decir no podríamos tomar la condición trivial, pero si podemos tomar que la derivada normal sea una constante en la superficie, $\partial'_n G_N = -\frac{4\pi}{S}$ para $\vec{x}'$ en S . La solución para condiciones de contorno de Neumann resultante es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}, \vec{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \partial'_n \Phi G_N ds' + S^{-1} \oint_S \Phi(\vec{x}') ds' \quad (2.69)$$

donde el último término es una constante.

2.7 Energía potencial electrostática

Veremos dos formas para encontrar la energía, primero partiremos de las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo y derivaremos la ecuación de conservación de la energía general, luego derivaremos el caso electrostático a partir del método constructivo, cuanto trabajo debemos invertir para generar una dada distribución de carga.

En general la conservación de la energía debe ser derivada de las ecuaciones que gobiernan el proceso físico. Es decir que trabajando con las ecuaciones de Maxwell debemos ser capaces de encontrar la forma de la energía.

Usando las ecuaciones de evolución de los campos:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.70)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (2.71)$$

Como queremos tener la evolución de la magnitud de los campos al cuadrado multiplicamos via producto interior a (2.70) por $\vec{E}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{1}{2} \partial_t |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (2.72)$$

y a (2.71) por $\vec{B}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1} \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} + \mu_0^{-1} \frac{1}{2} \partial_t |\vec{B}|^2 = 0 \quad (2.73)$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \partial_t |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} \partial_t |\vec{B}|^2 \right) = -\vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}) \quad (2.74)$$

Del cual resulta que

$$\partial_t \left[\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) \right] + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{J} \quad (2.75)$$

Esta es la forma de una ecuación de conservación, por un lado tenemos el término del cambio temporal de la densidad de energía, luego esta el término del flujo de energía, cuanta energía ingresa o se va del punto en consideración y finalmente tenemos las fuentes.

Denotamos entonces a:

- densidad de energía electromagnética: $W = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right)$,
- flujo de energía: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, vector de Poynting.
- $-\vec{E} \cdot \vec{J}$ fuentes

En el caso de campos electrostáticos la energía es constante: $\partial_t W = 0$

La energía electrostática viene dada por

$$w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (2.76)$$

la cual es constante.

2.7.1 Energía requerida para formar una distribución de carga

Calculemos el trabajo necesario para transportar una carga de prueba en un campo eléctrico externo desde un punto A hasta B .

Por definición el trabajo viene dado por

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (2.77)$$

El signo es debido a que estamos considerando el trabajo hecho sobre la carga en contra de la acción del campo eléctrico. Si tenemos una carga de prueba q en un campo eléctrico $\vec{E}$ a fuera viene dada por

$$W = -q \int_A^B \nabla \Phi \cdot d\vec{l} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A) \quad (2.78)$$

Notar que el trabajo realizado solo depende de los puntos finales pero no del camino realizado, una propiedad característica de las fuerzas conservativas. La independencia del camino se debe a que si hacemos un camino cerrado tenemos que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.79)$$

entonces la independencia del camino se debe a que el campo eléctrico es irrotacional, $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Si traemos a una carga desde el infinito donde asumimos que el potencial eléctrico es 0, hasta el punto $\vec{x}$ entonces

$$W = q\Phi(\vec{x}) \quad (2.80)$$

Esta puede ser considerada la energía potencial de la carga de prueba en el campo.

2.7.2 Energía potencial de N cargas en el vacío

Si queremos determinar cual es la energía potencial de un sistema de N cargas q_i ubicadas en $\vec{x}_i$, lo que haremos es comenzar a armar al sistema trayendo las cargas desde el infinito y calculando el trabajo que necesitamos realizar para colocarla en su posición. La primera carga no requiere de trabajo ya que no existe campo eléctrico, al traer la segunda carga tenemos el campo que produce la primera por lo que existirá una fuerza y el trabajo requerido es:

$$W_2 = q_2\Phi_1(\vec{x}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (2.81)$$

donde hemos asumido que las cargas están fijas y no existe interacción al traer las cargas. Cuando traigamos la carga q_3 el trabajo que tenemos que realizar

$$W_3 = q_3\Phi_1(\vec{x}_3) + q_3\Phi_2(\vec{x}_3) \quad (2.82)$$

Entonces generalizando el trabajo que tenemos que realizar para traer a la carga q_i es:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j(\vec{x}_i) \quad (2.83)$$

El potencial generado por las $i - 1$ cargas en $\vec{x}_i$ viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (2.84)$$

Por lo que el trabajo para traer a la carga q_i es

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (2.85)$$

Sumando entonces para las N cargas

$$W = \sum_{i=2}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (2.86)$$

Dado que las contribuciones son simétricas podríamos sumar directamente a todas excepto las mismas cargas y luego se multiplica por un medio,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (2.87)$$

Si tenemos una distribución de cargas continua

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV dV' \quad (2.88)$$

La integral en V' puede ser interpretada como el potencial generado por ρ ,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})dV \quad (2.89)$$

Si queremos expresar en función del campo eléctrico a la energía potencial usamos la ecuación de Poisson,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla^2 \Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})dV \quad (2.90)$$

Lo que debemos hacer es el equivalente a la integración por partes pero en varias dimensiones, notándose que:

$$\int \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dV = \int \Phi \nabla^2 \Phi dV + \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi dV \quad (2.91)$$

de aquí se deduce que

$$\int \Phi \nabla^2 \Phi dV = \int \Phi \nabla \Phi \cdot d\vec{s} - \int |\nabla \Phi|^2 dV \quad (2.92)$$

es decir que lo que en una dimensión corresponde a evaluación en los extremos aquí corresponde a una integral de superficie, esta integral es para $r \rightarrow \infty$, dado que en el límite $\Phi \rightarrow r^{-1}$, $|\nabla \Phi| \rightarrow r^{-2}$ y el $|d\vec{s}| \rightarrow r^{-2}$

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi \Phi|_V - \int_V |\nabla \Phi|^2 dV \right) \quad (2.93)$$

Como sabemos que Φ decae como r^{-1} y es 0 en el infinito, se tiene que $\nabla \Phi \Phi|_V = 0$, luego

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV \quad (2.94)$$

Esta es la expresión de energía que encontramos el caso electrostático en el desarrollo general para campos variables en el tiempo.

Ejercicio 2.3: Si tenemos una distribución de carga superficial $\sigma(\vec{x})$ en una superficie arbitraria cual es el campo eléctrico sobre cada lado de la superficie. Determine la densidad de energía del sistema.

Utilicemos el teorema de Gauss para determinar como es el campo en las cercanías de la superficie cargada, pongamos un cilindrito bien pegado a la superficie, dado que solo contribuyen las dos superficies del cilindro se tiene:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} \int ds = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \int ds \quad (2.95)$$

luego se tiene

$$\Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.96)$$

es decir el campo eléctrico tiene una discontinuidad en la superficie que posee la densidad de carga superficial.

La componente tangencial es:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.97)$$

$$(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.98)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.99)$$

$$(2.100)$$

La componente tangencial es continua.

Finalmente veamos como es la densidad de energía de este sistema,

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (2.101)$$

Ejercicio 2.4: Determinar la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas. Apliquemos la ley de Gauss asumiendo no hay cargas afuera del conductor,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.102)$$

$$(\vec{E}_{int} - 0) \cdot \hat{n} S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.103)$$

Luego el campo en el interior:

$$\vec{E}_{int} \cdot \hat{n} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \quad (2.104)$$

Entonces la energía por unidad de volumen almacenada es

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2} \quad (2.105)$$

La diferencia de potencial es:

$$\Delta\Phi = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_{int}d \quad (2.106)$$

La capacidad es

$$C = \frac{q}{\Delta\Phi} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2.107)$$