Electromagnetismo

Manuel Pulido
Departamento de Física,
Universidad Nacional del Nordeste
pulido@unne.edu.ar

30 March 11

Contenidos

Capítulo 1

Revisión de conceptos de análisis vectorial

Realizamos un repaso de identidades y conceptos del cálculo vectorial que nos serán de utilidad, necesidad, durante el curso de Electromagnetismo. Como referencia del tema se puede utilizar el Capítulo 1 del Griffiths.

1.1 Vectores

Si pensamos en vectores en $\mathbb{R}^3$ y los representamos en una base particular

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1.1}$$

cuyas componentes estan expresadas en las coordenadas cartesianas.

En general a un vector en $\mathbb{R}^3$ lo podemos expresar en función de una base $\{\hat{u}_i\}$ cualquiera

$$\vec{A} = A_1\hat{u}_1 + A_2\hat{u}_2 + A_3\hat{u}_3 \tag{1.2}$$

notar que el vector $\vec{A}$ es independiente de la base, sin embargo su expresión en componentes $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ si depende de la base.

Las bases que vamos a utilizar serán conformadas por vectores ortogonales y de modulo unidad $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ o $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$. A los vectores de modulo unidad los llamamos versores y los denotamos por el sombrerito.

Notación de Einstein. Se utiliza para ahorrar notación, todo doble índice lo interpretamos como una suma, y por lo tanto podemos obviar el símbolo de la suma (la sigma), es decir

$$\vec{A} = \sum_i A_i\hat{u}_i = A_i\hat{u}_i. \tag{1.3}$$

Esto también permite trabajar facilmente en dimensiones arbitrarias por ejemplo en $\mathbb{R}^n$. Se asume que la suma recorre todas las dimensiones del espacio donde estamos trabajando, si es en $\mathbb{R}^3$ irá de 1 a 3.

Suma de vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} = A_i \hat{u}_i + B_i \hat{u}_i = (A_i + B_i)\hat{u}_i \tag{1.4}$$

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\alpha \vec{A} = \alpha(A_i \hat{u}_i) = (\alpha A_i)\hat{u}_i \tag{1.5}$$

Producto interno. Es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Sean dos vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\mathbb{R}^3$ el producto interno de estos vectores se define por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \hat{u}_i \cdot B_j \hat{u}_j = A_i B_j \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = A_i B_i \tag{1.6}$$

donde hemos aplicado la propiedad distributiva quedando una doble suma y luego usamos las ortonormalidad de la base $\{\hat{u}_i\}$,

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1.7}$$

Definimos a la delta Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{1.8}$$

luego podemos expresar el producto interior de los vectores por

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}. \tag{1.9}$$

Notar que el resultado del producto interior de dos vectores es un escalar.

Módulo o norma de un vector. La norma de un vector es la raíz cuadrada del producto interno del vector por si mismo

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_i^2}. \tag{1.10}$$

Nota: Para la función módulo de un vector que es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ utilizamos el símbolo $|\;|$. Esta función es distinta de la utilizada para el módulo de un escalar aun cuando la denotemos con el mismo símbolo.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}| \tag{1.11}$$

La igualdad vale para el caso en el que los vectores sean paralelos o antiparalelos. En este caso si $\hat{u}_A$ es el versor en la direccion de $\vec{A}$, entonces podemos expresar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{u}_A, \qquad \vec{B} = |\vec{B}|\hat{u}_A \tag{1.12}$$

El producto interior de los vectores es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\hat{u}_A \cdot \hat{u}_A = |\vec{A}||\vec{B}| \tag{1.13}$$

El otro caso extremo es para $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, en este caso los vectores son ortogonales.

En general se tiene que

$$\cos\phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \tag{1.14}$$

donde ϕ es el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Entonces, en forma geómetrica independiente de la base, el producto interior se puede expresar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\phi. \tag{1.15}$$

Producto vectorial El producto vectorial de dos vectores en la base $\hat{u}_i$ viene dado por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - B_2A_3)\hat{u}_1 + (B_1A_3 - B_3A_1)\hat{u}_2 + (A_1B_2 - B_1A_2)\hat{u}_3 \tag{1.16}$$

Como forma mnemotécnica para el cálculo se utiliza

$$\vec{A} \times \vec{B} \; = \; \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

El producto vectorial se puede expresar en forma compacta usando el tensor de Levi-Civita quedando definido por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i A_j B_k \tag{1.18}$$

El tensor tridimensional anti-simétrico de Levi-Civita viene definido por

$$\epsilon_{ijk} \; = \; \begin{cases} 1 & \text{si ijk es una permutación par de (123)} \\ 0 & \text{si se repite el índice} \\ -1 & \text{si ijk es una permutación impar de (123)} \end{cases} \tag{1.19}$$

Permutaciones pares son 123, 231, 312. Mientras las permutaciones impares son 321, 132, 213. Como regla mnemotécnica se puede utilizar

$$sgn(\epsilon_{ijk}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Las propiedades del producto vectorial son

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}), \tag{1.21}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \times \vec{B})\vec{C}, \tag{1.22}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot C), \tag{1.23}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \tag{1.24}$$

Este último producto triple es el volumen del paralepípedo generado por los tres vectores. Este volumen da 0 si dos de los vectores son paralelos entre sí.

1.2 Transformación lineales. Transformación de vectores bajo rotaciones

Un tensor afin T de rango 2 es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si misma, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, especificada por una matriz real de 3×3, T_{jk} dada por

$$\tilde{\vec{A}} = T\vec{A} \tag{1.25}$$

en componentes vale que

$$\tilde{\vec{A}}_j = (T\vec{A})_j = T_{jk}A_k. \tag{1.26}$$

Ejemplo. Cuando queremos realizar una rotación de los ejes, ¿cómo quedará expresado el vector en un nuevo sistema de coordenadas rotado?. En primera medida cabe recordar que los vectores no se transforman, lo que cambia son las componentes en la base rotada.

Supongamos que rotamos los ejes de coordenadas $x - y$ en un ángulo ϕ la transformación de las componentes del vector $\vec{A}$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

1.3 Campos y operadores diferenciales

Definimos el operador vectorial (un bicho que se come funciones escalares o vectoriales) por

$$\nabla = \hat{u}_i \partial_{u_i}. \tag{1.28}$$

Si aplicamos el operador a una función escalar lo que tenemos es un vector gradiente. Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector lo que tenemos es la divergencia, mientras que si lo aplicamos a través del producto vectorial a un vector lo que tenemos es el rotor.

Gradiente Si aplicamos el operador nabla a un función escalar $\phi(\vec{x})$ lo que obtendremos es un campo vectorial definido por

$$\nabla\phi(\vec{x}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\vec{u}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\vec{u}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\vec{u}_3. \tag{1.29}$$

Esta definición es dependiente de las coordenadas que se utilizan, una definición independiente es

$$\vec{A} \cdot \nabla\phi(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} [\phi(\vec{x} + \epsilon\vec{A}) - \phi(\vec{x})]/\epsilon \tag{1.30}$$

para todo vector $\vec{A}$ en $\mathbb{R}^3$.

El gradiente de ϕ en un punto $\vec{x}$, apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función ϕ en $\vec{x}$. Es decir apunta hacia la cima, mientras $-\nabla\phi$ apunta hacia el valle. La magnitud del vector nos da la razón de crecimiento de la función escalar.

Divergencia Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector tenemos una función escalar definida por

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= (\hat{u}_i \partial_{u_i}) \cdot (A_j \hat{u}_j) \\ &= \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \partial_{u_i} A_j \\ &= \delta_{ij} \partial_{u_i} A_j \\ &= \partial_{u_i} A_i\end{aligned} \tag{1.31}$$

La divergencia es una medida de como el campo vectorial sale/diverge del punto en cuestión, esta estrechamente relacionada a la integral de superficie, en una pequeña superficie cerrada que rodea al punto, cualquier diferencia en esta superficie entre los campos salientes y entrantes serán interpretados como una divergencia o convergencia del campo vectorial.

Las fuentes (líneas salientes de un punto) tienen divergencia positiva, los sumideros (líneas congruentes a un punto) divergencia negativa. $\boxed{?}$

Faltan graficos

Rotor El rotor proviene de la aplicación del operador nabla a través del producto vectorial a un campo vectorial, el cual da como resultado un vector dado por

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{x}) = \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Reglas de la derivación En general para demostrar las reglas de derivación del análisis vectorial se trata de escribir en componentes y utilizar los resultados del cálculo de una variable. De gran utilidad es la notación de Einstein.

Ejemplos.

(a)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \partial_{u_i} (\phi A_i) \\ &= \partial_{u_i} \phi A_i + \phi \partial_{u_i} A_i \\ &= \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A}\end{aligned}$$

donde se ha usado que la derivada del producto es el producto de las derivadas en 1D.

(b)

$$\begin{aligned}[\nabla \times (\phi \vec{A})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k) \\ &= \epsilon_{ijk} [\partial_j \phi A_k + \phi \partial_j A_k] \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_j \phi A_k + \phi(\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) \\ &= (\nabla \phi \times \vec{A})_i + \phi(\nabla \times \vec{A})_i\end{aligned}$$

donde hemos usado derivada de un producto, para luego realizar distributiva y finalmente asociar a rotores los términos resultantes.

1.4 Integración en varias variables

Integral de línea. Integral de un campo vectorial a lo largo de un camino, esta puede ser entre dos puntos a y b, $\int_a^b \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ o a lo largo de un camino cerrado $\oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Si el campo vectorial es conservativo la integral de línea es independiente del camino.

Integral de superficie Integral de un campo vectorial en una superficie, $\int_S \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ donde $\mathrm{d}\vec{s}$ es un vector normal a la superficie que apunta hacia afuera de ésta.

Teorema fundamental de Gauss o de la divergencia Si tenemos un volumen V en $\mathbb{R}^3$ que es cerrado y acotado con borde S suave y $\vec{A}$ es un campo vectorial en V que es continuamente diferenciable, entonces

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}V = \oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{1.33}$$

La integral de la divergencia de un campo vectorial en un volumen es igual a la integral del campo vectorial en la superficie que encierra a dicho volumen.

En general, la integral de superficie es el flujo del campo vectorial a través de la superficie, y puede ser expresado por

$$\oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{u}_n \, \mathrm{d}s = \oint_S A_n \, \mathrm{d}s \tag{1.34}$$

donde $\hat{u}_n$ es el versor normal saliente de la superficie y A_n es la componente del campo vectorial en la dirección normal saliente.

El flujo eléctrico saliente de una superficie esta relacionado a la divergencia del campo eléctrico en el interior. El flujo saliente de un fluido incomprensible es igual a la cantidad de fluido que se esta inyectando dentro del volumen.

La suma de las divergencias en todos los puntos adentro del volumen se cancelarán y solo me quedarán las contribuciones de la superficie.

Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada, cerrada y acotada con borde Γ suave y $\vec{V}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en una region que contiene a S y su frontera entonces

$$\int_S \nabla \times \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{1.35}$$

la integral de línea puede ser expresada por

$$\oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_\Gamma v_t \mathrm{d}l \tag{1.36}$$

donde v_t es la componente tangencial a la curva Γ, y la integral de línea se interpreta como la *circulación* del campo vectorial a lo largo de la curva cerrada Γ.

El teorema se puede pensar como que: la suma de pequeños vórtices ubicados en la superficie S es igual a la circulación en la curva cerrada que encierra a la superficie. En el caso en que $\nabla \times \vec{V} = 0$ en S (el rotor es 0 para todo punto de S), entonces el campo es irrotacional, y esta libre de vórtices.

Campo vectorial conservativo. Si el campo vectorial $\vec{V}$ puede ser expresado como $\vec{V} = \nabla\phi$ entonces ϕ es el potencial del campo vectorial y se dice que $\vec{V}$ es conservativo.

Corolario 1. Los campos vectoriales conservativos son irrotacionales. Supongamos existe una ϕ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$, entonces tenemos que el campo conservativo satisface $\nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla\phi = 0$. Por lo que un campo vectorial conservativo es irrotacional.

Corolario 2. Para campos conservativos las integrales de línea entre dos puntos son independientes del camino. Demostremos este enunciado. Sea la integral de línea entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a lo largo de una curva Γ_1 que va entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si elegimos otra curva entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, Γ_2 entonces la integral

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{1.37}$$

donde ambas curvas Γ_1 y Γ_2 se interpretan desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$, por lo que para la integracion desde $\vec{b}$ hasta $\vec{a}$ se realiza con signo positivo. Ademas en la segunda igualdad de (1.37) se uso el teorema de Stokes y luego en la tercera igualdad se usa que $\nabla \times \vec{V} = 0$ (Corolario 1). Entonces tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{1.38}$$

Notar que para que valga este resultado el rotor del campo debe ser 0 en *toda* la superficie comprendida entre Γ_1 y Γ_2.

El lector se preguntará entonces si vale la afirmación inversa, ¿todo campo vectorial irrotacional será convervativo? la respuesta es no siempre, solo para el caso en el que la región donde el campo es irrotacional sea simplemente conexa, Como contraejemplo, supongamos un toro o donut/rosquilla de Homero, en ese caso no tenemos garantizado si la integración es por fuera de la donut que el campo sea conservativo.

En el caso en que la región sea simplemente conexa vale el teorema siguiente:

Teorema Si $\nabla\times\vec{V} = 0$ en una región simplemente conexa V donde $\vec{V}$ es continuamente diferenciable, entonces para $\vec{p}$ en V, la integral de línea

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{x}} \vec{V} \cdot \mathrm{d}s, \tag{1.39}$$

es independiente de la curva que une a $\vec{p}$ con $\vec{x}$ y se puede definir un potencial de $\vec{V}$ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende de ϕ.

Esta claro ahora que si tenemos un campo vectorial que esta libre de vórtices en una región simplemente conexa, entonces podemos aplicar el razonamiento inverso, es decir en la región interna a la de las curvas Γ_1 y Γ_2 *todo* punto del campo vectorial será irrotacional y por lo tanto la integral de línea cerrada es 0 de lo cual se deduce que las integrales de línea entre los dos caminos Γ_1 y Γ_2 son iguales. En el caso en que el dominio en el que el campo sea irrotacional no sea simplemente conexo no tenemos garantía que la integral cerrada se anule.

Ahora supongamos que tenemos un campo vectorial que existe un campo vectorial $\vec{A}$ tal que el campo $\vec{V}$ se puede escribir de la forma $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$ luego se deduce que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, *el campo es solenoidal.* Vale la pregunta inversa también en este caso, ¿será que todo campo vectorial solenoidal se puede escribir como el rotor de un campo vectorial? La respuesta es equivalente al anterior planteo. Si la región V donde se cumple que el campo es solenoidal tiene la propiedad que cualquier superficie cerrada en S encierra un volumen cuyos puntos son todos pertenecientes a la región V entonces vale, es decir el campo vectorial solenoidal puede ser escrito como un rotor de otro campo vectorial.

1.4.1 Identidades de Green

Si proponemos al campo vectorial dado por dos funciones escalares ϕ, ψ:

$$\vec{A} = \phi \nabla \psi \tag{1.40}$$

Luego reemplazamos esta expresión en el teorema de la divergencia:

$$\int \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \mathrm{d}V = \oint_S \phi \nabla \psi \cdot \hat{n} \mathrm{d}s \tag{1.41}$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie.

Expandiendo la primera integral en (1.41) obtenemos:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V = \oint_S \phi \partial_n \psi \mathrm{d}s \tag{1.42}$$

donde $\partial_n \psi$ es la derivada de ψ en la dirección normal a la superficie.

La ecuación (1.42) es conocida como la primera identidad de Green.

La segunda identidad de Green se obtiene a partir de aplicar la primera identidad de Green a $\vec{A} = \phi \nabla \psi$ y a $\vec{A} = \psi \nabla \phi$, en este último caso la primera identidad de Green se lee

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) \mathrm{d}V = \oint_s \psi \partial_n \phi \mathrm{d}s \tag{1.43}$$

Restando (1.42) menos (1.43) resulta la segunda identidad de Green:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \mathrm{d}V = \oint_S (\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi) \mathrm{d}s \tag{1.44}$$

Teorema de Helmholtz Si $\vec{V}$ es un campo vectorial continuamente diferenciable del cual conocemos su divergencia y su rotor y éstos se van a 0 en el infinito (al menos como r^{-3}), entonces, este campo vectorial queda univocamente determinado cuando especificamos su divergencia y su rotor.

Demostración. Demostremos que el campo $\vec{V}$ lo podemos descomponer y escribir como la suma de un campo solenoidal y de un campo irrotacional $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \tag{1.45}$$

Entonces si encontramos a la función escalar ϕ y además encontramos al campo vectorial $\vec{A}$ hemos logrado la descomposición.

Si aplicamos la divergencia a (1.45) tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \phi \tag{1.46}$$

es decir que si tenemos como dada a $\nabla \cdot \vec{V}$, debemos determinar la ϕ que satisfface la ecuación de Poisson. La ϕ se determina de

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} \mathrm{d}V' + \oint_S \left[\phi \partial_n (r^{-1}) - \frac{\partial_n \phi}{r} \right] \mathrm{d}s' \tag{1.47}$$

donde $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Esta solución se puede encontrar utilizando la segunda identidad de Green, en la cual se toma una función escalar como ϕ y la segunda función escalar como $\psi = 1/r$. Ver Ejercicio.

En un problema sin condiciones de contorno la superficie S puede ser pensada como una esfera cuyo radio tiende a ∞ como tenemos que $\nabla \cdot \vec{V} \to r^{-3}$ para $r \to \infty$ entonces $\phi \to r^{-1}$ para $r \to \infty$. La integral de superficie se anula (sin embargo si es importante para cuando tenemos condiciones de contorno). Luego se tiene que

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} \mathrm{d}V' \tag{1.48}$$

Ahora pasamos a la demostración de la existencia de $\vec{A}$, aplicando $\nabla \times$ a la expresión (1.45) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{aligned} \tag{1.49}$$

como $\vec{A}$ esta determinada a menos de un gradiente, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$, manteniendose el mismo rotor $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$, entonces podemos elegir a ψ tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Supongamos que $\nabla \times \vec{A} \neq 0$, luego se tiene que $\nabla \cdot (\vec{A}' + \nabla\psi) = \gamma$, Entonces puedo resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 \psi = \gamma$, encontrando a ψ y por lo tanto vale que $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$.

Luego la ecuación resultante es

$$\nabla \times \vec{V} = -\nabla^2 \vec{A} \tag{1.50}$$

pero estas son tres ecuaciones de Poisson, entonces bajo los mismos argumentos podemos encontrar que

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{V}}{r} \mathrm{d}v \tag{1.51}$$

Entonces por un lado hemos demostrado que existen ϕ y $\vec{A}$ tal que el campo vectorial lo puedo descomponer en (1.45) por otro lado hemos demostrado que si conocemos a $\nabla \cdot v$ y $\nabla \times \vec{V}$ podemos determinar a $\vec{V}$.

Este resultado es de fundamental importancia en electrostática donde tendremos especificado la divergencia y el rotor del campo eléctrico y a partir de estos determinaremos al campo. Notar que la demostración realizada aquí, asume un dominio no acotado y totalmente abierto. Mas adelante durante el curso veremos el caso general a dominios con condiciones de contorno.

1.5 Función delta de Dirac

Es una función impropia que tiene las siguientes propiedades,

(a) $\delta(x-a) = 0$ si $x \neq a$

(b) $\int \delta(x-a)\mathrm{d}x = 1$ si la región de integración contiene al punto a y es 0 si no lo contiene.

Dadas estas dos propiedades la delta de Dirac es clasificada como un distribución o función generalizada. Puede ser pensada como el límite de funciones cuyo ancho disminuye mientras su altura crece acordemente tal que el área integrable se conserve.

Algunas propiedades derivables importantes de la delta:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a)$

(b) $\int f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x = -f'(a)$

(c) $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$ k una constante.

(d) $\delta(f(x)) = \sum_i \left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|^{-1} \delta(x-x_i)$ donde x_i son las raíces de $f(x)$.

(e) $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)\mathrm{d}k$

Ejemplo.

Si $k > 0$ entonces propongo como cambio de variables $y = kx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y)\mathrm{d}y/k \\ &= f(0)/k \end{aligned} \tag{1.52}$$

Si $k < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(y/k)\delta(y)\mathrm{d}y/k \\ &= -f(0)/k. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Capítulo 2

Electrostática

2.1 Ley de Coulomb y principio de superposición

Si tenemos dos cargas q_1 y q_2 existirá una interacción eléctrica entre estas cargas que produce una fuerza de la forma

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1\, q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} \tag{2.1}$$

donde r_{12} es la distancia entre las dos cargas, y $\hat{r}_{21}$ es la dirección entre las cargas desde la carga q_2 hacia la carga q_1, $\vec{F}_1$ es la fuerza que siente la carga q_1. Esta es la famosa ley de Coulomb y explica la interacción eléctrica estática entre cargas, fue propuesta a partir de numerosas observaciones de fenómenos eléctricos y ha sido extensivamente corroborada. En particular la dependencia con la inversa del cuadrado a la distancia r^{-2}, siendo el exponente -2 una expresión muy precisa, es decir se ha corroborado el exponente -2 experimentalmente con numerosos decimales.

¿Que sucede si ahora introducimos una tercera carga q_3 en el sistema? ¿Cual es la fuerza que sentirá q_1? Si solo estan las cargas q_1 y q_2 tenemos la expresión (2.1). Si ahora solo tenemos en el sistema a las cargas q_1 y q_3 entonces tendremos una expresión similar a (2.1),

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{31}. \tag{2.2}$$

¿Podemos suponer que la fuerza total que se le ejerce es la suma de $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{13}$? ¿Es decir existen interacciones eléctricas entre las cargas q_2 y q_3 que puedan alterar la fuerza que se ejerce sobre q_1 cuando q_2 y q_3 actuan juntas sobre q_1?

La respuesta es no hay efectos secundarios, ni interacciones, y se puede asumir que las cargas actuan independientemente. En efecto este es un principio muy general en el electromagnetismo, denominado *principio de superposición*, y ha sido evaluado y comprobado en numerosas situaciones experimentales. De aqui en mas asumimos la validez de este principio en el electromagnetismo y toda la teoría electromagnética se construye en base a este. Expresado de otra manera el principio de superposición, nos dice que los efectos electromagnéticos o los campos eléctricos y magnéticos van a ser lineales. Veamos entonces a que nos estamos refiriendo por *campos*.

2.2 Concepto de campo

Supongamos que queremos aislar los efectos que produce una distribución de cargas de la distribución de carga en sí, incluso podrían existir dos distribuciones de carga que produzcan el mismo efecto por lo que nuestro interés es olvidarnos de la distribución de cargas y concentrarnos solamente en los efectos que éstas producen.

Si ponemos una carga de prueba en una posición arbitraria dentro de un sistema que contiene una distribución de carga, la carga de prueba sentirá los efectos eléctricos de la distribución de carga de tal manera que la distribución de carga le realizará una fuerza a la carga de prueba dada por

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.3}$$

donde $\vec{E}(\vec{x})$ es el efecto de la distribución de carga en la posición $\vec{x}$ donde ubicamos a la carga q.

Entonces podemos definir el campo eléctrico en el punto $\vec{x}$ por

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}}{q} \tag{2.4}$$

La carga de prueba debe ser lo suficientemente pequeña como para que no altere los efectos del campo eléctrico existente.

¿Por que es de tanta importancia el concepto de campo?

- Dos distribuciones de cargas distintas pueden producir exactamente los mismos efectos.

- Los campos electromagnéticos pueden existir en regiones donde no hay cargas. Los campos pueden incluso transportar momento y energía y pueden existir aun en el vacío.

- Todos los procesos electromagnéticos pueden ser tratados a través del campo eléctrico y magnético.

2.3 Ecuaciones de Maxwell

Vamos a establecer las ecuaciones que gobiernan los procesos electromagnéticos, denominadas ecuaciones de Maxwell, estas ecuaciones en principio las tomaremos como un conjunto de postulados, a pesar que por supuesto han sido derivadas a través numerosos esfuerzos obsersacionales y teóricos.

Sea una distribución de carga $\rho(\vec{x})$ y una densidad superficial de corriente $\vec{J}(\vec{x})$ que estan en el vacío, las ecuaciones que gobiernan los campos electromagnéticos son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.6}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.8}$$

donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío y μ_0 es la permitividad en el vacío. La velocidad de la luz en el vacío viene dada por $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$.

- ρ es la densidad de carga volumétrica es decir tiene unidades de carga por unidad de volumen. En general la denominaremos distribución de carga.
- $\vec{J}$ es la densidad superficial de corriente, tiene unidades de carga por unidad de tiempo y superficie.

Las ecuaciones (2.5)-(2.8) son las ecuaciones de Maxwell que nos determinan los campos eléctricos y magnéticos y su evolución en el tiempo. Las incógnitas son las 3 componentes del campo eléctrico, $\vec{E}$, y las tres componentes del campo magnético, $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de 8 ecuaciones, las cuales por supuesto no son todas linealmente independientes (dado que existen solo 6 incógnitas, si fueran linealmente independientes entonces el sistema no tendría solución), de las 8 ecuaciones solo 6 son linealmente independientes.

Se debe notar que los términos fuentes, términos no-homogéneos de las ecuaciones, es decir aquellos que son generadores de los campos son:

- La distribución de cargas ρ/ϵ_0
- La distribución de corrientes $\mu_0 \vec{J}$

Estos términos son los datos, son prescripciones del problema y actuan como las fuentes de los campos. También el problema debe explicitar las condiciones de contorno, en el caso que se requiera la solución en un dominio acotado. Si el problema es en el espacio libre, en $\mathbb{R}^3$ se pide que la densidad y corrientes sean acotadas, es decir que decaigan a 0 en el infinito (ver Teorema de Helmholtz en el capítulo 1).

Las ecuaciones de Maxwell son lineales en las variables incógnitas $\vec{E}$ y $\vec{B}$, esto significa que una superposición lineal de soluciones es también solución, que por supuesto esto esta basado en el principio de superposición.

Los términos de las variaciones temporales de los campos, (2.6) y (2.7) son los que acoplan las ecuaciones, notar que las variaciones temporales del campo eléctrico producen campo magnético (2.6) y viceversa (2.7).

No existen cargas magnéticas (monopolos), razón por la cual el término no-homogéneo en la ecuación del divergencia del campo magnético es nulo.

La conservación de la carga esta implícita en las ecuaciones de Maxwell, (2.5)-(2.8), en efecto si aplicamos el operador divergencia a (2.6),

$$-\epsilon_0 \partial_t \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{J} \tag{2.9}$$

Si usamos (2.5) y reemplazamos en (2.9), se tiene

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{2.10}$$

Esta es la expresión general de la conservación de la carga, si integramos en un volumen, lo que obtenemos es que

$$\partial_t Q + \oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{2.11}$$

donde $Q = \int_V \rho \mathrm{d}V$ y se ha usado el teorema de Gauss. Esta expresión (2.11) nos dice que los cambios de la carga total que esta localizada en el volumen V se deben unicamente al flujo de cargas que atravieza la superficie S (contorno de V). Es decir, que si tenemos un flujo entrante de cargas positivas la carga total encerrada aumentará, mientras una salida de carga disminuirá la carga neta total localizada dentro del volumen. Esta es la única posibilidad de variación de la carga a través del transporte, pero no pueden ni aparecer ni desaparecer, solo transportarse de un lugar a otro.

En el caso que también exista en el espacio un campo magnético, la fuerza que se ejerce sobre la carga viene dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.12}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la carga y $\vec{B}$ es el campo magnético. Ésta expresión es conocida por *fuerza de Lorenz*.

La expresión de la fuerza de Lorenz es discutida en el marco general del electromagnetismo con la relatividad espacial y existen expresiones alternativas como la ley de Einstein-Laub que es una generalización de la de Lorenz. Para una discusión de este aspecto ver un trabajo reciente sobre el tema, Mansuripur (2012)[1]

2.4 Estática

Si la distribución de cargas y corrientes son independientes del tiempo, éstas producirán campos eléctricos y magnéticos que son independientes del tiempo es decir los términos de las ecuaciones $\partial_t \vec{E}$ y $\partial_t \vec{B}$ se anulan y por lo tanto las ecuaciones se reducen a:

[1]Mansuripur, 2012: Trouble with the Lorentz law of force: Incompatibility with special relativity and momentum conservation, *Physical Research Letters*, **108**, 193901.

cuatro ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.13}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.14}$$

y cuatro para el campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.15}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.16}$$

La conclusión mas importante que se puede deducir es que los campos eléctricos y magnéticos están desacoplados para el caso estático. Esta es la razón por la cual históricamente los fenómenos eléctricos se consideraban de una naturaleza independiente de los fenómenos magnéticos hasta que los experimentos de Faraday con corrientes que variaban en el tiempo permitieron comprender que ambos fenómenos en el fondo estaban ligados intrinsicamente.

La primera parte de esta materia la dedicaremos a estudiar la electrostática es decir aquellos fenómenos que están gobernados por las ecuaciones (2.13) y (2.14).

El teorema de Helmholtz nos garantiza que si se especifica la divergencia de un campo vectorial y el rotor de ese campo es posible determinar el campo unívocamente si el campo cumple ciertas condiciones de decaimiento lejos de las distribuciones de carga r^{-2}. Alternativamente se pide que la divergencia del campo decaiga como r^{-3}.

La resolución de problemas de electrostática se suele simplificar a través de la introducción de un potencial eléctrico esto es una función escalar Φ que esta definida por:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \tag{2.17}$$

donde entonces por su propia definición se verifica que

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla\Phi = 0 \tag{2.18}$$

esto es cualquier potencial eléctrico, dada la forma en que lo definimos satisface trivialmente la ecuación de rotor del campo igual a 0.

De esta manera la única ecuación que debería satisfacer el potencial es (2.13) reemplazando en esta ecuación la definición 2.17 se obtiene:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.19}$$

Esta es la conocida ecuación de Poisson. Si la distribución de cargas es nula se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{2.20}$$

en este caso para que la solución no sea la trivial deberían existir condiciones de borde que deba satisfacer el campo eléctrico, las cuales discutiremos mas adelante.

Notar que la definición del potencial eléctrico nos permite una fuerte simplificación del problema electrostático, de hecho pasamos de tener 3 variables incógnitas (E_x, E_y, E_z) a tener que resolver una ecuación solo para Φ. Esto se debe a que estas variables no son independientes por lo que con determinar una sola función escalar Φ ya es posible determinar las tres componentes del campo eléctrico. La restricción que nos permite pasar de tres variables a una sola variable incognita es el hecho que el campo es irrotacional. Esta restricción son tres ecuaciones de las cuales solo dos son linealmente independientes.

2.5 Solución del problema electrostático. Caso sin fronteras

Queremos encontrar el campo eléctrico para un sistema compuesto por una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ en el espacio abierto y no existen condiciones de contorno.

Todo lo que conocemos es que el campo eléctrico debería satisfacer

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.21}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.22}$$

2.5.1 Carga puntual

Supongamos que tenemos una carga puntual q ubicada en el origen, proponemos como ansatz que el campo eléctrico de la carga puntual es:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^3} \tag{2.23}$$

La densidad de carga de una carga puntual es:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}) \tag{2.24}$$

Tratemos ahora de demostrar que efectivamente (2.23) es la solución. Si (2.23) satisface la ecuación de la divergencia (2.21), se tiene que

$$\nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^3}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(\vec{x}) \tag{2.25}$$

por lo que deducimos se debe demostrar que:

$$\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = 4\pi\delta^3(\vec{x}). \tag{2.26}$$

En coordenadas esféricas la divergencia de un campo vectorial $\vec{V} = V_r\hat{u}_r + V_\theta\hat{u}_\theta + V_\phi u_\phi$ se expresa como:

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi V_\phi \tag{2.27}$$

Luego para $r > 0$ se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 r^{-2}) = 0 \tag{2.28}$$

Sin embargo en el origen la función $\frac{\hat{r}}{r^2}$ no esta acotada. Si integramos alrededor del origen con una esfera de radio R, además usando el teorema de Gauss (el cual es válido para $r > 0$) se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{V_R} \nabla \cdot \vec{V} \mathrm{d}V &= \int_{S_R} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
&= 4\pi \qquad (2.29) \\
& \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Luego hemos demostrado que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{x}) \tag{2.31}$$

Entonces interpretando este resultado a la luz del electromagnetismo, en particular de la ecuación (2.21), se tiene que una densidad de carga dada por una carga puntual en el origen: $\rho = 4\pi\epsilon_0\delta^3(\vec{x})$ genera un campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{x}}{r^3}. \tag{2.32}$$

Continuemos por el próximo caso mas simple posible; una carga puntual ubicada en $\vec{x}_0$, la distribución de carga correspondiente a la carga puntual se puede escribir en la forma:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{2.33}$$

Es decir que las ecuaciones resultantes son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = q/\epsilon_0\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{2.34}$$

Ya hemos demostrado que $\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = \delta^3(\vec{x})$ es decir ya conocemos que la divergencia del campo $\hat{x}/|\vec{x}|^2$ nos da la función delta de Dirac. Dejamos como ejercicio su generalización a un caso relativo a $\vec{x}_0$.

Ejercicio 2.1: Extender el resultado al caso relativo a un vector $\vec{x}_0$: $\nabla \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^3) = 4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ donde el ∇ representa la derivada con respecto a $\vec{x}$.

Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio, y multiplicando al campo $(\vec{x}-\vec{x}_0)/|\vec{x}-\vec{x}_0|^3$ por q/ϵ_0 podemos proponer como solución del campo eléctrico a:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\hat{x} - \hat{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 \tag{2.35}$$

por construcción entonces esta ecuación cumple con la primera ecuación de la electrostática (2.21), ¿cumplirá con las otras tres, (2.22), es decir esta este campo libre de vórtices?

Ejercicio 2.2: Demuestre que $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right) = -\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$.

Dado el ejercicio 2.2 aplicamos el rotor:

$$\nabla \times \vec{E} = q/(4\pi\epsilon_0)\nabla \times \nabla\left[\frac{\hat{x}-\hat{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right] \tag{2.36}$$

Dado que el rotor de un gradiente es siempre 0 (ejercicios) se tiene que el campo eléctrico encontrado satisface:

$$\nabla \times E = 0 \tag{2.37}$$

Entonces la solución del campo eléctrico de una carga puntual es la dada por (2.35). Si en esta solución ponemos el origen del sistema de coordenadas en donde se ubica la carga resulta que el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2}. \tag{2.38}$$

Claramente las líneas del campo son entrantes/salientes a la carga.

El ejercicio 2.2 nos permite determinar el potencial eléctrico de una carga puntual, definamos al potencial eléctrico por $\vec{E} = -\nabla\Phi$, entonces

$$-\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\right) \tag{2.39}$$

Entonces a menos de una constante aditiva el potencial eléctrico de una carga puntual viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}. \tag{2.40}$$

Si tenemos una carga de prueba q_p inmersa en el campo generado por la carga generadora del campo q (2.38), se tiene que la fuerza que se ejercen entre si, de (2.3) y (2.38) es dada por

$$\vec{F} = q_p\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\, q_p \frac{\hat{x}}{r^2} \tag{2.41}$$

esta es la conocida ley de Coulomb que nos da la fuerza que se ejercen dos cargas puntuales. La dirección $\hat{x}$ debería ser interpretada como la dirección que liga a las cargas, desde la carga q a la carga q_p (interpretamos que $\vec{F}$ es la fuerza que se ejerce sobre q_p), mientras r es la distancia entre las cargas. Ver sección 2.1 para mas detalles sobre la ley de Coulomb.

Hemos demostrado entonces que la ley de Coulomb esta de acuerdo con las ecuaciones de electrostática. También es interesante desarrollar el camino inverso, partiendo de la ley de Coulomb llegar a las ecuaciones de electrostática. Se deja como ejercicio para el lector motivado.

Demostración utilizando el teorema de Gauss

Si integramos en un volumen arbitrario a la ec. (2.21) resulta

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \mathrm{d}V = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho \mathrm{d}V. \tag{2.42}$$

En el lado derecho de esta ecuación (2.42) tenemos la integral en volumen de la densidad volumétrica de carga, por lo que esta es la carga total encerrada en el volumen V la cual denotaremos por Q.

Aplicando ahora el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la ecuación (2.42) resulta que

$$\int_V \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \epsilon_0^{-1} Q \tag{2.43}$$

este es el resultado conocido en electromagnetismo como el teorema de Gauss. Una lectura física de este teorema nos dice que el flujo de campo eléctrico en una superficie cerrada esta *absolutamente* determinado por la carga encerrada en dicha superficie. El campo en V es totalmente independiente de las cargas externas a la superficie.

Asumamos que tenemos como volumen una superficie esférica S de radio R alrededor de la carga con centro en la carga luego:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= |\vec{E}| R^2 \int \mathrm{d}\Omega \\ &= |\vec{E}| 4\pi R^2 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Entonces, el módulo del campo eléctrico de una carga puntual q viene dado por

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2. \tag{2.45}$$

Dadas las características del teorema de Gauss, las líneas de superficie del campo eléctrico deben ser entrantes o salientes a una carga puntual de lo contrario el campo podría depender de las cargas externas. Entonces la dirección del campo es $\hat{r}$ (versor de coordenadas esféricas, saliente del origen).

Luego el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2 \hat{r}. \tag{2.46}$$

2.5.2 Campo eléctrico producido por una distribución de carga arbitraria. Solución general sin fronteras

Para generalizar el resultado obtenido en (2.38) utilizamos el principio de *superposición lineal*, es decir si existen varias cargas el campo eléctrico solución será la suma de los campos producidos por cada una de las cargas por separado. Supongamos que el lugar de observación es $\vec{x}$ y la ubicación de las N cargas q_i es $\vec{x}_i$ entonces el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} \tag{2.47}$$

En el caso que tengamos una distribución de cargas continuas la suma pasa a ser una integral en volumen y $q_i \to \rho \mathrm{d}V$,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{2.48}$$

donde $\vec{x}'$ es la posición de la carga infinitesimal $\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$, la integración se realiza en $\vec{x}'$. En general a la posicion $\vec{x}'$, la llamaremos punto fuente, ya que es donde se ubican las cargas que son generadoras del campo eléctrico. Mientras $\vec{x}$ es el lugar donde se mide el campo eléctrico y es un vector fijo a los fines de la integración. A $\vec{x}$ en este contexto lo llamaremos el punto observación.

La ecuación (2.48) es *la solución general del problema electrostático para cualquier distribución de cargas sin condiciones de contorno.* Dada la distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ se puede obtener el $\vec{E}$ a través de (2.48) que por construcción satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de la electrostática (2.21) y (2.22).

Si se quiere determinar el potencial eléctrico de una distribución de cargas arbitraria nuevamente utilizamos el resultado del ejercicio 2.2, $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$, para expresar el campo eléctrico en la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{2.49}$$

donde se ha usado que el operador ∇ es la derivada en $\vec{x}$, y por lo tanto independiente de la integral que se realiza en la variable $\vec{x}'$.

Luego dada la definición del potencial $\vec{E} = -\nabla\Phi$ se determina que

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{2.50}$$

este potencial queda definido a menos de una constante, sin embargo dado que estamos en un problema sin CCs se suele tomar como potencial en el infinito $\Phi = 0$ lo que determina esta constante. De todas maneras nótese que lo único físico aquí es el campo eléctrico $\vec{E}$ por lo que el potencial es solo una metodología de resolución por el momento y aun no tiene significado físico.

Si quisiéramos demostrar que (2.50) satisface la ecuación de Poisson. Apliquemos a esta ecuación el operador laplaciano:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{2.51}$$

Como ya hemos visto $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

Recordando que $\int_V f(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V' = f(\vec{x})$ resulta

$$\nabla^2\Phi = -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \tag{2.52}$$

Entonces reobtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \tag{2.53}$$

2.5.3 Unicidad de la solución caso sin fronteras: Teorema de Helmholtz

En la unidad 1, hemos visto que vale la relación

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{2.54}$$

si comparamos con la ecuación de Poisson (2.53), se determina que para una carga puntual $q = 4\pi\epsilon_0$ ubicada en $\vec{x}'$, o equivalentemente una distribución de carga dada por $\rho(\vec{x}) = 4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$, la solución, potencial eléctrico, es:

$$\Phi_p = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{2.55}$$

En lugar de usar el principio de superposición directa vamos a utilizar la segunda identidad de Green, (1.44), tomando como funciones $\phi = \Phi$ el potencial eléctrico general y $\psi = \Phi_p = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ el potencial electrico de una cara puntual $q = 4\pi\epsilon_0$, tenemos

$$\int_V\left[\Phi\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\nabla^2\Phi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\mathrm{d}V' = \oint_S\left[\Phi\partial_n\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\partial_n\Phi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\mathrm{d}s'. \tag{2.56}$$

Teniendo en cuenta que $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ y que $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$ y despejando se obtiene

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\Phi(\vec{x}')\partial_n\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) - \frac{\partial_n\Phi}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\mathrm{d}s'. \tag{2.57}$$

Si $\Phi \to r^{-1}$ cuando $r \to \infty$, entonces las integrales de superficie se anulan para un problema sin condiciones de frontera. El potencial eléctrico resultante para una distribución de carga arbitraria ρ es

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V'. \tag{2.58}$$

2.6 Solución general del problema electrostático. Caso con condiciones de contorno

Hasta el momento, entonces, hemos encontrado la solución general para el problema sin condiciones de contorno en la vida real los problemas suelen estar en volúmenes finitos con especificación de condiciones de contorno en dicho volumen. Por ejemplo cuando se trabaja dentro de una caja de Faraday donde las condiciones de contorno quedan especificadas a través de un potencial constante (o cero por convención) en la caja.

Para trabajar con condiciones de contorno necesitamos pensar en dos aspectos:

1. ¿Qué condiciones de contorno se deben exigir tal que la solución del problema sea única? Si uno especifica menos condiciones de contorno de las requeridas las soluciones serían infinitas si se sobre-especifican puede no haber ninguna solución.

2. Desarrollar un método de resolución para problemas que contengan los efectos de las condiciones de contorno.

2.6.1 Unicidad de la solución

Por el momento proponemos el tipo de condiciones de contorno que resultan razonables y luego demostraremos que efectivamente éstas son las condiciones de contorno que imponen una solución única al problema electrostático.

Si estamos resolviendo un problema en Φ que satisface la ecuación de Poisson, (2.19), lo que proponemos es:

- Condición de Dirichlet: conocemos al potencial Φ en la superficie cerrada que encierra el dominio.

- Condición de Neumann: Se especifica la derivada normal del potencial eléctrico en la superficie, este es el campo eléctrico en la superficie. Esto podría ser interpretado como dar una densidad de carga superficial tal que genere la derivada normal del potencial eléctrico.

Demostremos la unicidad del problema con condiciones de Dirichlet reduciendo el argumento contrario al absurdo, es decir propongamos que existen dos soluciones para terminar demostrando que la única posibilidad es que estas sean exactamente iguales.

Sean Φ_1 y Φ_2 dos soluciones a la ecuación de Poisson, (2.19), con condiciones de contorno de Dirichlet, e.g. $\Phi_1 = V_1(\vec{x})$ en S. Consecuentemente definimos una función que es la diferencia de las dos soluciones $\Psi = \Phi_2 - \Phi_1$ luego la ecuación diferencial que satisface Ψ en el interior de V es:

$$\nabla^2\Psi = 0 \tag{2.59}$$

cuya condición de contorno en S, debe ser $\Psi = 0$. Desde luego estamos ante un problema donde no existen fuentes en el interior y por otro lado la condición de contorno es la trivial, luego se trata de demostrar que en este caso la función Ψ debe ser idénticamente nula en todo el interior y por lo tanto no pueden existir dos soluciones distintas.

De la primera identidad de Green eligiendo ambas variables, ψ y ϕ como Ψ se tiene

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Psi + \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi)\mathrm{d}V = \oint_S \Psi\partial_n\Psi\mathrm{d}s \tag{2.60}$$

dadas las condiciones de contorno de Dirichlet $\Psi = 0$ en S. Por otro lado también sabemos que $\nabla^2\Psi = 0$ luego resulta que

$$\int_V |\nabla\Psi|^2\mathrm{d}V = 0 \tag{2.61}$$

pero entonces el único Ψ que puede satisfacer esta integral es que $\nabla\Psi = 0$ luego se tiene que Ψ es una constante adentro de V pero dado que las condiciones de contorno son que $\Psi = 0$ esa constante tiene que ser el 0. Finalmente hemos determinado que:

$$\Phi_1 = \Phi_2. \tag{2.62}$$

La solución del problema con condiciones de Dirichlet es por lo tanto única.

Este resultado nos indica que si hubiéramos pedido condiciones de Cauchy, es decir, exigiendo valores de Φ y $\partial_n\Phi$ arbitrarios en S no existe solución. Si tenemos un dado Φ y elegimos un valor arbitrario de $\partial_n\Phi$ que no corresponde al Φ especificado entonces no existirá una solución para tal problema (ya que con solo elegir una de las dos condiciones el problema ya tiene solución única).

2.6.2 Solución general del problema. Función de Green

El problema que queremos resolver es encontrar el potencial eléctrico Φ que satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = -\rho(\vec{x})/\epsilon_0 \tag{2.63}$$

sujeto a condiciones de Dirichlet o Neumann en el contorno del dominio.

En el caso de resolución del problema sin condiciones de contorno, léase con condiciones de contorno en el infinito, el método que utilizamos para encontrar la solución fue primero encontrar la solución del problema de una carga puntual. Luego para el problema de una distribución de cargas, utilizamos una superposición lineal, es decir la solución del problema consistió en sumar las soluciones de cada una de las carguitas puntuales que componen la distribución de carga y de esta forma encontramos la solución general del problema sin condiciones de contorno para una distribución de cargas arbitraria. ¿Podemos extender este método de resolución al caso con condiciones de contorno?

Para esto deberíamos resolver el problema de una carga puntual q ubicada en una posición arbitraria $\vec{x}_0$, es decir $\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$,

$$\nabla^2\Phi_p = -q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)/\epsilon_0 \tag{2.64}$$

dado que luego vamos a usar el principio de superposición, nos conviene tomar como condición de contorno de potencial 0.

Por comparación con el caso sin condiciones de contorno, Sección (2.5.3), podemos ver que la carga que debería tomarse es de $q = 4\pi\epsilon_0$.

Si ahora tenemos una distribución de carga arbitraria y suponemos que conocemos la solución para el problema de una carga puntual, lo que hacemos es utilizar la segunda identidad de Green, con Φ y Φ_p,

$$ \tag{2.65}$$

Interpretación de la función de Green La expresión de la solución general esta sujeta a determinar la función de Green la cual es la solución de un problema de Poisson para una carga puntual de carga $q = -4\pi\epsilon_0$ con condiciones de contorno triviales $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ sin embargo estas son para $\vec{x}'$ en S. Es decir hemos convertido el problema de densidad de carga con condiciones de contorno de Dirichlet en S en un problema de una carga puntual con condiciones de contorno de Dirichlet triviales. (Aun cuando el problema es mas simple que el original no siempre este puede ser resuelto, en particular si las condiciones de contorno involucran geometrías complicadas).

Para condiciones de contorno de Neumann se debe notar que no podemos tomar $\partial'_n G_N(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ ya que si integramos en un volumen la ecuación diferencial para la función de Green (**??**) resulta

$$\int_V \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') \mathrm{D}V' = -4\pi \int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') \mathrm{d}V' \tag{2.66}$$

Usando el Teorema de la divergencia resulta que

$$\oint_S \partial'_n G \mathrm{d}s' = -4\pi \tag{2.67}$$

es decir no podríamos tomar la condición trivial, pero si podemos tomar que la derivada normal sea una constante en la superficie, $\partial'_n G_N = -\frac{4\pi}{S}$ para $\vec{x}'$ en S. La solución para condiciones de contorno de Neumann resultante es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}, \vec{x}') \mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \partial'_n \Phi G_N \mathrm{d}s' + S^{-1} \oint \Phi(\vec{x}') \mathrm{d}s' \tag{2.68}$$

donde el último término es una constante.

2.7 Energía potencial electrostática

Veremos dos formas para encontrar la energía, primero partiremos de las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo y derivaremos la ecuación de conservación de la energía general, luego derivaremos el caso electrostático a partir del método constructivo, cuanto trabajo debemos invertir para generar una dada distribución de carga.

En general la conservación de la energía debe ser derivada de las ecuaciones que gobiernan el proceso físico. Es decir que trabajando con las ecuaciones de Maxwell debemos ser capaces de encontrar la forma de la energía.

Usando las ecuaciones de evolución de los campos:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.69}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{2.70}$$

Como queremos tener la evolución de la magnitud de los campos al cuadrado multiplicamos via producto interior a (2.69) por $\vec{E}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1}\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \epsilon_{)}\frac{1}{2}\partial_t |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{2.71}$$

y a (2.70) por $\vec{B}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1}\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} + \mu_0^{-1}\frac{1}{2}\partial_t |\vec{B}|^2 = 0 \tag{2.72}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \partial_t |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}\partial_t |\vec{B}|^2\right) = -\vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}) \tag{2.73}$$

Del cual resulta que

$$\partial_t \left[\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right)\right] + \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{J} \tag{2.74}$$

Esta es la forma de una ecuación de conservación, por un lado tenemos el término del cambio temporal de la densidad de energía, luego esta el término del flujo de energía, cuanta energía ingresa o se va del punto en consideración y finalmente tenemos las fuentes.

Denotamos entonces a:

- densidad de energía electromagnética: $w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2\right)$,
- flujo de energía: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, vector de Poynting.
- $-\vec{E} \cdot \vec{J}$ fuente de energía electromagnética.

En el caso de campos electrostáticos la energía es constante: $\partial_t W = 0$

La densidad de energía electrostática viene dada por

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 |\vec{E}|^2 \tag{2.75}$$

la cual es constante temporalmente. La energía electrostática de un sistema será dada por

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int |\vec{E}|^2 \mathrm{d}V \tag{2.76}$$

2.7.1 Energía requerida para formar una distribución de carga

En electrostática el campo eléctrico es conservativo por lo que la energía electrostática de un sistema debería ser igual al trabajo requerido para armar el sistema. Calculemos entonces el trabajo necesario para transportar una carga de prueba en un campo eléctrico externo desde un punto A hasta B.

Por definición el trabajo viene dado por

$$W = -\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{2.77}$$

El signo es debido a que estamos considerando el trabajo hecho sobre la carga en contra de la acción del campo eléctrico. Si tenemos una carga de prueba q en un campo eléctrico $\vec{E}$ *externo*, la fuerza es $\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla\phi$, por lo tanto se tiene

$$W = -q \int_A^B \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q \int_A^B \mathrm{d}\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A) \tag{2.78}$$

Notar que el trabajo realizado solo depende de los puntos finales pero no del camino realizado, una propiedad característica de las fuerzas conservativas. La independencia del camino se debe a que si hacemos un camino cerrado tenemos que

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{2.79}$$

entonces la independencia del camino se debe a que el campo eléctrico es irrotacional, $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Si traemos a una carga desde el infinito donde asumimos que el potencial eléctrico es 0 hasta el punto $\vec{x}$, el trabajo realizado se puede expresar por

$$W = q\Phi(\vec{x}) \tag{2.80}$$

La energía potencial de la carga de prueba en el campo es entonces dada por (2.80).

2.7.2 Energía potencial de N cargas en el vacío

Si queremos determinar cual es la energía potencial de un sistema de N cargas q_i ubicadas en $\vec{x}_i$, lo que haremos es comenzar a armar al sistema trayendo las cargas desde el infinito y calculando el trabajo que necesitamos realizar para colocarla en su posición final. La primera carga no requiere de trabajo ya que no existe campo eléctrico,. Al traer la segunda carga tenemos el campo que produce la primera por lo que existirá una fuerza y el trabajo requerido es dado por (2.80):

$$W_2 = q_2\Phi_1(\vec{x}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \tag{2.81}$$

donde hemos asumido que las cargas están fijas y no existe interacción al traer las cargas. Cuando traigamos la carga q_3 el trabajo que tenemos que realizar es

$$W_3 = q_3\Phi_1(\vec{x}_3) + q_3\Phi_2(\vec{x}_3) \tag{2.82}$$

Entonces generalizando el trabajo que tenemos que realizar para traer a la carga q_i es:

$$W_i = q_i\Sigma_{j=1}^{i-1}\Phi_j(\vec{x}_i) \tag{2.83}$$

El potencial generado por las $i-1$ cargas en $\vec{x}_i$ viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.84}$$

Por lo que el trabajo para traer a la carga q_i es

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.85}$$

Sumando entonces para las N cargas

$$W = \sum_{i=2}^{N}\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.86}$$

Dado que las contribuciones son simétricas podríamos sumar directamente a todas excepto las mismas cargas y luego se multiplica por un medio,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_iq_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \tag{2.87}$$

Si tenemos una distribución de cargas continua, usamos (2.87) con $q_i \rightarrow \rho(\vec{x})\mathrm{d}V$ y las sumas son reempladas por integrales quedando,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\mathrm{d}V\mathrm{d}V'. \tag{2.88}$$

La integral en V' puede ser interpretada como el potencial generado por ρ,

$$W = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\mathrm{d}V \tag{2.89}$$

Si queremos expresar en función del campo eléctrico a la energía potencial usamos la ecuación de Poisson,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int\nabla^2\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})\mathrm{d}V \tag{2.90}$$

Para obtener las dependencias con el campo eléctrico, lo que debemos usar es el equivalente a la integración por partes pero en varias dimensiones, la cual viene dada por:

$$\int \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) \mathrm{d}V = \int \Phi \nabla^2 \Phi \mathrm{d}V + \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \mathrm{d}V \tag{2.91}$$

de aquí se deduce usando teorema de Gauss que

$$\int \Phi \nabla^2 \Phi \mathrm{d}V = \int \Phi \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \int |\nabla \Phi|^2 \mathrm{d}V \tag{2.92}$$

es decir que lo que en una dimensión corresponde a evaluación en los extremos aquí corresponde a una integral de superficie. Esta integral de superficie es igual a 0 para $r \to \infty$, dado que en el límite $\Phi \to r^{-1}$, $|\nabla \Phi| \to r^{-2}$ y el $|\mathrm{d}\vec{s}| \to r^{-2}$. La energía electrostática (2.88) puede ser entonces expresada como

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi \, \Phi|_V - \int_V |\nabla \Phi|^2 \mathrm{d}V \right) \tag{2.93}$$

Como sabemos que Φ decae como r^{-1} y es 0 en el infinito, se tiene que $\nabla \Phi \, \Phi|_V = 0$, luego

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\nabla \Phi|^2 \mathrm{d}V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 \mathrm{d}V \tag{2.94}$$

Esta es la expresión de energía es equivalente a la que encontramos para el caso electrostático en el desarrollo general para campos variables en el tiempo.

Ejercicio 2.3: Si tenemos una distribución de carga superficial σ en un conductor plano cual es el campo eléctrico sobre cada lado de la superficie. Determine la densidad de energía potencial electrostática del sistema. Compare con la energía de una distribución superficial de carga σ.

Utilicemos el teorema de Gauss para determinar como es el campo en las cercanías de la superficie cargada, pongamos un cilindrito bien pegado a la superficie, dado que solo contribuyen las dos superficies del cilindro, una dentro del conductor y la otra pegada por fuera de este, se tiene:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} \int \mathrm{d}s = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \int \mathrm{d}s \tag{2.95}$$

luego se tiene

$$\Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{2.96}$$

es decir la componente normal del campo eléctrico tiene una discontinuidad en la superficie que posee la densidad de carga superficial, como $\vec{E}_1 = 0$ entonces,

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{2.97}$$

La componente tangencial del campo eléctrico es:

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \tag{2.98}$$

$$(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{2.99}$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{2.100}$$

$$\tag{2.101}$$

Por lo tanto, la componente tangencial es continua e igual a 0.

Finalmente veamos como es la densidad de energía de este sistema,

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \tag{2.102}$$

En el caso de una distribución superficial de carga, el campo eléctrico estará en ambos lados de la superficie por lo que es la mitad $E_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, mientras la energía es un cuarto del caso del plano conductor, i.e. $w = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_0}$.

Ejercicio 2.4: Determinar la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas. Apliquemos la ley de Gauss asumiendo no hay cargas afuera del conductor,

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.103}$$

$$(\vec{E}_{int} - 0) \cdot \hat{n}\, S = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.104}$$

Luego el campo en el interior:

$$\vec{E}_{int} \cdot \hat{n} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \tag{2.105}$$

Entonces la energía por unidad de volumen almacenada es

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2} \tag{2.106}$$

La diferencia de potencial es:

$$\Delta\Phi = -\int_0^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -E_{int} d \tag{2.107}$$

La capacidad es

$$C = \frac{q}{\Delta\Phi} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \tag{2.108}$$

Capítulo 3

Función de Green en distintas geometrías

De lo visto en el capítulo anterior, podemos concluir que la resolución de un problema electrostático general con condiciones de frontera, se concentra en la determinación de la función de Green para el problema, la cual se debe notar que solo depende de la geometría del problema es decir de la superficie del contorno y, dada su definición, es independiente de la distribución de cargas en el volumen y de la especificación exacta de la condición de contorno. Si queremos determinar la función de Green se debe resolver la siguiente ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{3.1}$$

con $G_D = 0$ en S para el problema de Dirichlet.

Método de las imágenes Una de las metodologías que se utiliza para encontrar la función de Green es a través del denominado método de las imágenes. El método consiste en poner una carga puntual en el dominio y poner cargas "imagénes" fuera del dominio en cuestión (fuera de S), se pondrán cargas con magnitudes y en las posiciones necesarias para que el problema cumpla con las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann en S. Es decir que la posición y magnitud de las cargas imágenes se determinarán de la exigencia que el potencial sea 0 en S para el caso de Dirichleto que la derivada normal del potencial sea una constante para el caso de Neuman. Notar que las cargas imágenes estan fuera del dominio y por lo tanto *no* contribuyen a la ecuación de Poisson adentro del dominio la cual solo tendrá la carga puntual. La única función de las cargas externas es la de genera las condiciones de contorno adecuadas.

3.1 Función de Green para el semiespacio $x > 0$

Se plantea como problema encontrar el potencial eléctrico de una carga puntual q que se encuentra situada a una distancia d de un plano conductor con $\Phi = 0$ ubicado en $x = 0$. Este problema lo vamos a plantear a través del método de las imágenes por lo que proponemos a la carga fuente y ademas proponemos una carga imagen q' ubicada en una posicion d' que estaria fuera del dominio de interes, es decir ubicada en $x < 0$. El potencial general viene entonces dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[(x-d')^2+y^2+z^2]^{1/2}}\right\} \tag{3.2}$$

donde hemos asumido por razones de simetría que la carga imagen se encuentra ubicada en la misma línea que une la carga fuente con la normal al plano. Dada la analogía con el problema de óptica resulta evidente que la carga imagen debería ser $q' = -q$ y estar ubicada en $d' = -d$, sin embargo a los fines de concentrarnos en el procedimiento veamos como se determinarián la carga imagen y su posición. Es decir tenemos dos incognitas, y sabemos que se debe cumplir que $\Phi(x = 0) = 0$, de aqui podemos tomar dos casos particulares para tener un sistema de dos ecuaciones, $y = z = 0$ y $y = y_0$ y $z = 0$. Para el primer caso se tiene que

$$\Phi(x=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{d} - \frac{q'}{d'}\right) = 0 \tag{3.3}$$

donde se asume que $d' < 0$. Por lo que la carga imagen viene dada por

$$q' = q\frac{d'}{d} \tag{3.4}$$

De la seguna ecuación se obtiene que

$$\Phi(x=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(d^2+y_0^2)^{1/2}} + \frac{qd'}{d(d'^2+y_0^2)^{1/2}}\right) = 0 \tag{3.5}$$

de donde se deduce que

$$d^2(d'^2+y_0^2) - d'^2(d^2+y_0^2) = 0 \tag{3.6}$$

es decir que la posicion de la carga imagen es $d'^2 = d^2$, de aqui descartamos la solución $d' = d$ ya que estaria dentro del dominio en consideración y de hecho esta solucion nos daria un potencial nulo en todas partes, por lo que la posición de la carga imagen debe ser $d' = -d$ y reemplazando en (3.4) se obtiene que $q' = -q$. El potencial entonces es dado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{1/2}}\right\} \tag{3.7}$$

esta ecuación cumple con ambas premisas del problema, tiene una carga puntual ubicada a una distancia d del plano y además en todo el plano $x = 0$ el potencial se hace 0.

Este potencial eléctrico (3.7) es en general el potencial de una carga puntual en un problema cuyas condiciones de contorno en el plano $x = 0$ y en infinito son $\Phi = 0$. Por lo que sabemos que el potencial (3.7) satisface:

$$\nabla^2\Phi_p = q/\epsilon_0\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{3.8}$$

donde $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ son vectores localizados en el semiespacio $x > 0$, y además se nota que por construcción (3.7) satisface con la condición de contorno $\Phi = 0$ en $x = 0$.

Ejercicio 3.1: a) Determinar la densidad de carga superficial de (3.7) sobre la superficie contorno $x = 0$ para un plano conductor con una carga puntual q. b) Integrar la densidad de carga superficial obtenida en a) para obtener la carga total inducida en el plano. Explique el resultado en terminos de superficies Gaussianas. c) Determinar la fuerza con la que la carga es atraida hacia el plano. d) Calcular la energía potencial electrostática.

Es decir que si fijamos el valor de la carga a $q = 4\pi\epsilon_0$, el potencial (3.7) es la función de Green de Dirichlet para el semiespacio $x > 0$,

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \tag{3.9}$$

A través de esta función de Green podemos expresar la solución del problema general electrostático para el semiespacio $x > 0$,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}')G(\vec{x} - \vec{x}')\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{x}')\partial_n G(\vec{x}, \vec{x}') \tag{3.10}$$

Ejercicio 3.2: Determinar $\partial_n G(\vec{x}, \vec{x}')$ en el problema del plano conductor.

Ejercicio 3.3: Determinar el potencial en el caso que tenemos dos planos formando un ángulo $\alpha = \pi/2$ y existe una carga puntual q ubicada en una posición arbitraria. Escriba la función de Green del problema.

Ejercicio 3.4: ¿Como cambia la funcion de Green, (3.9), en el caso en que queramos resolver un problema en el semiespacio $x < 0$?

3.2 Función de Green para la esfera. Método de las imágenes

En el caso que tengamos una carga puntual frente a una esfera conductora conectada a tierra, $\Phi = 0$. El problema entonces podría ser planteado por el método de las imágenes: ponemos una carga imagen dentro de la esfera, y dada la simetría del problema debería estar en la misma dirección que la carga.

El potencial que debemos resolver es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \frac{x_0'}{x_0}\vec{x}_0|}\right). \tag{3.11}$$

Luego lo que debemos determinar es la carga imagen q' y la posición x_0'.

La distancia entre dos vectores puede ser expresada en la forma:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}_0| &= \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{x}_0 + \vec{x}_0\cdot\vec{x}_0} \\ &= \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x} - 2|\vec{x}||\vec{x}_0|\cos\gamma + \vec{x}_0\cdot\vec{x}_0} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rr_0\cos\gamma + r_0^2} \end{aligned}$$

donde γ es el ángulo entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{x}_0$ y r, r_0 son sus respectivos módulos.

Solo necesito dos ecuaciones ya que son dos las incógnitas, tomo por simplicidad sobre la esfera de radio a las direcciones: $\cos\gamma = \pm 1$.

Las dos ecuaciones resultantes son:

$$\Phi(\vec{x} = \vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_0 - a} + \frac{q'}{a - r_0'}\right) = 0 \tag{3.12}$$

$$\Phi(\vec{x} = \vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_0 + a} + \frac{q'}{a + r_0'}\right) = 0 \tag{3.13}$$

Resolviendo el sistema (3.12)-(3.13) se obtiene $r_0' = \frac{a^2}{r_0}$ y $q' = -\frac{a}{r_0}q$.

Mientras mas cerca esta la carga de la esfera mas cerca también estará la carga imagen. Si la carga esta muy lejos de la esfera la carga imagen será muy pequeña.

El potencial de una carga puntual que se encuentra dentro de una esfera conductora conectada a tierra tal que el potencial en la esfera es $\Phi = 0$ es

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{a}{r_0|\vec{x} - \frac{a^2}{r_0^2}\vec{x}_0|}\right). \tag{3.14}$$

Ejercicio 3.5: Calcular la densidad superficial de carga sobre la esfera conductora utilizando que $\sigma = \epsilon\partial_n\Phi$. Determinar la fuerza con la que la carga es atraida por la esfera conductora.

La fuerza con que la carga es atraida por la esfera conductora puede ser calculada directamente teniendo en cuenta la fuerza que se ejercen las cargas fuente e imagen. Dado que el efecto sobre la esfera conductora es de inducción habrá una atracción razón por la cual las cargas son de distinto signo. La distancia entre las cargas es:

$$r_0 - r_0' = r_0 - \frac{a^2}{r_0} = r_0\left(1 - \frac{a^2}{r_0^2}\right) \tag{3.15}$$

La fuerza es entonces:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{(r_0 - r_0')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{aq^2}{r_0^3(1 - a^2/r_0^2)^2} \tag{3.16}$$

Entonces para alejar a una carga de un metal tenemos que hacer un trabajo que se debe a la inducción de cargas de signo contrario en el metal, en el método de las imágenes esto se debe directamente a la atracción entre la carga fuente y la carga imagen.

Ejercicio 3.6: Determinar el potencial en el caso en que tenemos una esfera conductora con carga Q. En este caso la solución será una superposición del problema que ya resolvimos al problema de una carga puntual $Q - q'$ en el origen.

Ejercicio 3.7: Esfera conductora a un potencial V. Calcular cual es la carga que genera ese potencial, $Q - q' = Va$, y luego resolver como el ejercicio anterior.

Ejercicio 3.8: Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme. Pensar en cargas externas opuestas entre sí.

Si tenemos en cuenta la solución que se encontró para una carga puntual frente a una esfera conductora con potencial $\Phi = 0$, (3.14), reemplazando el valor de la carga por $q = 4\pi\epsilon_0$ tenemos la función de Green para el problema de Dirichlet de la esfera (notar que pedimos que el potencial sea nulo en el contorno), además cambiamos de notación r_0 por r',

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a/r'}{|\vec{x} - (a/r')^2 \vec{x}'|} \right). \tag{3.17}$$

Esta es la función de Green para el problema interno de la esfera.

Teniendo en cuenta que el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ es γ, usando (3.12) en (3.17) tenemos

$$G_D = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{-1/2} - \left(\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos\gamma \right)^{-1/2}. \tag{3.18}$$

La solución general del problema con condiciones de contorno de Dirichlet

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} G_D(\vec{x} - \vec{x}') \mathrm{d}V' - \int_S \left[\Phi\, \partial'_n G_D(\vec{x} - \vec{x}') \right] \mathrm{d}s' \right\}. \tag{3.19}$$

Por lo que además de la función de Green (3.18) necesito determinar la derivada normal en la superficie esférica de la función de Green. Derivando a (3.18) con respecto a la normal, es decir con respecto a $-r'$, ya que es hacia el interior de la esfera, la derivada normal resultante es

$$\partial_{n'} G_D|_{r'=a} = -\frac{(r^2 - a^2)}{a(r^2 + a^2 - 2ra\cos\gamma)^{3/2}} \tag{3.20}$$

esta representa la densidad superficial de carga inducida en el conductor debido a la presencia de la carga $q = 4\pi\epsilon_0$.

Ejercicio 3.9: ¿Como cambia la función de Green, (3.17), en el caso en que se quiera resolver un problema exterior?

Para el caso en que tenemos la superficie esférica con un potencial $\Phi(a, \theta, \phi) = V(\theta, \phi)$ y queremos resolver el problema externo sabiendo que no hay cargas, $\rho = 0$, y que $\Phi(r \to \infty) = 0$ usamos (3.19),

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \phi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} \mathrm{d}\Omega'. \tag{3.21}$$

Ejercicio 3.10: Demostrar que $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$. Esta transformación reviste de importancia ya que las coordenadas de la expresión de la derecha corresponden a los ángulos de las coordenadas esféricas.

Pensemos en dos vectores unitarios $|\vec{x}| = |\vec{x}'| = 1$.

Si usamos el teorema del coseno

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos\gamma = 2(1 - \cos\gamma) \tag{3.22}$$

Pensando en las coordenadas de los dos vectores:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 2(1 - \cos\gamma) \tag{3.23}$$

Transformando a coordenadas esféricas las coordenadas x, y, z y x', y', z',

$$(\cos\phi\sin\theta - \cos\phi'\sin\theta')^2 + (\sin\phi\sin\theta - \sin\phi'\sin\theta')^2 + (\cos\theta - \cos\theta')^2 = 2(1 - \cos\gamma). \tag{3.24}$$

Expandiendo los cuadrados y haciendo un poquito de álgebra resulta

$$\cos\gamma = \cos\theta'\cos\theta + \sin\theta'\sin\theta\cos(\phi' - \phi). \tag{3.25}$$

Ejercicio 3.11: Un problema de aplicación de (3.21) es una esfera conductora que tiene un aislante en el Ecuador, y de esta manera se divide en dos hemisferios uno el superior de potencial $+V$ y otro el inferior de potencial $-V$.

Reemplazando $\Phi(a, \theta', \phi')$ en la ecuación (3.21)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{V}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \left[\int_0^1 d(\cos\theta') - \int_{-1}^0 d(\cos\theta')\right] \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} \tag{3.26}$$

donde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$.

3.3 Separación de variables

La ecuación de Laplace puede ser resuelta proponiendo una solución que es un producto de funciones de sus variables independientes, es decir asumiendo que la solución es separable en sus variables independientes. Dado que la solución es única si existe tal solución la solución es por lo tanto separable. Existen en total 11 tipos de coordenadas para los cuales se conoce la solución de la ecuación de Laplace. En este curso solo veremos 3 de estas coordenadas: rectangulares, esféricas y cilíndricas.

Dado que el conjunto de soluciones es un conjunto ortogonal y *completo*, entonces estas soluciones pueden ser utilizadas para todos los casos cuya geometría este ligada al tipo de coordenadas que se utiliza.

3.3.1 Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares es

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{3.27}$$

Proponemos que la solución puede escribirse como el producto de tres funciones; cada una de estas funciones es solo función de una de las variables independientes del problema x, y, z:

$$\Phi(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \tag{3.28}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{3.29}$$

nótese que la derivadas son derivadas totales. Entonces la ecuación (3.29) ha quedado expresada en tres términos los cuales cada uno depende de una variable distinta, esta es la cualidad interesante que tiene la ecuación de Laplace (como toda ecuación lineal) por lo que para que esta expresión sea válida cada uno de los términos debería ser una constante ya que si dependier'an de cada una de las variables no habría forma de satisfacer la ecuación.

Supongamos que la caja a resolver tiene condiciones de contorno periódicas en x e y y no periódicas en z. Esto permite que la ecuación pueda ser expresada como tres ecuaciones diferenciales ordinarias en variables diferentes es decir

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2, \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -\beta^2, \tag{3.31}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = \gamma^2 \tag{3.32}$$

donde el signo de la constantes se ha tomado de acuerdo a la condición de contorno. Si la condición es periódica se toma negativo, si la condici'on es no peri'odica se toma la constante positiva. Si se reemplaza en la ecuación de Laplace, estas tres ecuaciones dierenciales ordinarias, (3.30)-(3.32), se tiene que las constantes deben satisfacer

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2. \tag{3.33}$$

Las soluciones para cada ecuación diferencial ordinaria son

$$X = \exp \pm i\alpha x \qquad Y = \exp \pm i\beta y \qquad Z = \exp \pm \gamma z \tag{3.34}$$

Para determinar las constantes α y β, además del conjunto de soluciones necesitamos imponer las condiciones de contorno.

Supongamos una caja con una arista ubicada en el origen y el resto de las aristas se encuentra en el subespacio positivo, cuyos lados en x, y y z son a, b y c respectivamente. La caja tiene potencial $\Phi = 0$ excepto la cara superior $z = c$ la cual tiene un potencial de $\Phi = V(x, y)$.

De la condición $\Phi(x = 0) = 0$ se tiene que $X = \sin(\alpha x)$

De la condición $\Phi(y=0)=0$ se tiene que $Y=\sin(\beta y)$

De la condición $\Phi(z=0)=0$ se tiene que $Z=\sinh(\gamma z)$

Como $\Phi=0$ en $x=a$ $X=\sin(\alpha a)=0$ luego la condición es que $\alpha a=n\pi$ es decir que α esta cuantizado de la forma:

$$\alpha=\frac{n\pi}{a} \tag{3.35}$$

De la condición de contorno en $y=b$ se tiene

$$\beta=\frac{m\pi}{b} \tag{3.36}$$

Entonces los funciones en las variables x e y quedan cuantizadas, debido a que hemos exigido condiciones periódicas en un dominio acotado, de tal manera que n y m determinarán el numero de raíces en las direcciones x y y respectivamente.

Luego γ queda determinado por

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2} \tag{3.37}$$

Estos conjuntos de funciones ortogonales son completos en la caja sujeto a todas la funciones que cumplen con las condiciones de contorno.

La solución general será suma de todos los modos posibles

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm}z) \tag{3.38}$$

con la condición de contorno que falta en $z=c$:

$$\Phi(x,y,z=c)=V(x,y) \tag{3.39}$$

Dado que las funciones son una base para cualquier $V(x,y)$, se determina las constantes, A_{nm},

$$A_{nm}=\frac{4}{ab\sin(\gamma_{nm}c)}\int_0^a\int_0^b V(x,y)\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.40}$$

esto se obtiene evaluando a (3.38) en $z=c$, multiplicando a ambos lados por $sin(\alpha_{n'}x)\sin(\beta_{m'}y)$ e integrando x y y y usando ortogonalidad de las funciones.

3.3.2 Ecuación de Laplace en coordenadas polares

Si tenemos un problema electrost'atico sin fuentes $\rho=0$ que tenga geometr'ia cil'indrica y que tenga simetr'ia en el eje z o que de coordenadas polares, e.g. discos concéntricos, planos formando un ángulo, etc. Con esto nos estamos refiriendo a que *las condiciones de contorno del problema* estan expresadas en coordenadas cil'indricas, adem'as si decimos que tiene simetr'ia en una de las variables, lo que estamos diciendo es que las condiciones de contorno son independientes de esa variable, y por lo tanto la soluci'on del problema, el potencial, ser'a independiente de esa variable. Entonces por ejemplo nos estamos refiriendo a un problema de condiciones de contorno en un cilindro $\Phi(\rho = a, \phi, z) = V(\phi)$ y se quiere encontrar el potencial en el interior del cilindro.

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\Phi) + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\phi\phi}\Phi + \partial^2_{zz}\Phi = 0 \tag{3.41}$$

Dado que las condiciones de contorno del problema son independentes de la variable z, la soluci'on tambi'en lo es, por lo que unicamente debemos resolver el problema en el plano:

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\Phi) + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\phi^2}\Phi = 0 \tag{3.42}$$

Asumiendo la solución es separable en las variables ρ y ϕ, luego,

$$\Phi = R(\rho)\Psi(\phi) \tag{3.43}$$

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación diferencial (3.42), en forma equivalente al caso de coordenadas rectangulares, para satisfacer la ecuación diferencial resultante cada uno de los términos de la ecuación deben ser constantes:

$$\frac{\rho}{R}\partial_\rho(\rho\partial_\rho R) = \nu^2 \tag{3.44}$$

y

$$\partial^2_{\phi^2}\Psi = -\nu^2 \tag{3.45}$$

Resolviendo la ecuación para ρ, (3.44),

$$\partial_\rho(\rho\partial_\rho R) = \nu^2\frac{R}{\rho} \tag{3.46}$$

las posibles soluciones son $R = \rho^{\pm\nu}$ donde aun no se ha demostrado la cuantización es decir ν es un número real.

En el caso en que $\nu = 0$ se tiene que

$$\partial_\rho(\rho\partial_\rho R) = 0 \tag{3.47}$$

cuya solución es

$$R = C\ln(\rho/\rho_0). \tag{3.48}$$

En el caso de la variable angular se tiene que

$$\Psi(\phi) = A\cos(\nu\phi) + B\sin(\nu\phi) \tag{3.49}$$

en el caso de $\nu = 0$ es

$$\Psi = E + F\phi \tag{3.50}$$

como las funciones deben ser univaluadas se debe pedir que:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \tag{3.51}$$

es decir que la funcion Φ debe satisfacer condiciones de contorno periódicas, esto muestra que ν debe ser entero y lo llamaremos n, además se debe pedir por la periodicidad que $F = 0$.

La solución general de la ecuaci'on de Laplace para un problema en coordenadas polares, i.e. coordenadas cil'indricas con independencia de la variable z, es

$$\Phi(x,y,z) = a_0 \ln(\rho/\rho_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\{[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)]\rho^n + [c_n \cos(n\phi) + d_n \sin(n\phi)]\rho^{-n}\}. \tag{3.52}$$

Ejercicio 3.12: Se tienen dos discos concéntricos de radios $\rho = a$ y $\rho = b$ con potenciales $\Phi(\rho = a) = V_1$ y $\Phi(\rho = b) = V_2$. Determinar el potencial en el interior entre los discos.

Rta. La solución viene dada por (**??**). Dado que el problema es independiente de ϕ, se deduce que de la soluci'on se tiene a_n, b_n, c_n y d_n son 0, luego solo permanece el primer t'ermino en (**??**). Las dos constantes se deben determinar de la condici'on de contorno, por comodidad reescribimos las constantes de tal manera que la soluci'on sea $\Phi = A + B\ln\rho$, luego

$$A + B\ln a = V_1 \tag{3.53}$$

y

$$A + B\ln b = V_2 \tag{3.54}$$

la solución debe ser

$$\Phi = (\ln(a/b))^{-1}[V_1 \ln(\rho/b) - V_2 \ln(\rho/a)]. \tag{3.55}$$

3.4 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Simetría azimutal

Supongamos un problema donde se quiere determinar el potencial en un dominio que esta libre de cargas ($\rho = 0$) con condiciones de contorno en una esfera de radio $r = a$ donde el potencial es $V(\theta)$. En este caso lo mas conveniente es utilizar la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y determinar el conjunto de funciones ortonormales que satisfacen esta ecuación de Laplace con simetría azimutal, i.e. el problema y en particular su soluci'on es independiente de ϕ.

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r}\partial^2_{rr}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_{\phi\phi}\Phi = 0. \tag{3.56}$$

Para resolver esta ecuación utilizamos el método de separación de variables. Como el problema tiene simetría azimutal proponemos una solución que sea independiente de ϕ,

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) \tag{3.57}$$

si sustituimos esta solución en la ecuación (3.56) se debe cumplir que

$$\frac{P}{r} \partial^2_{rr} U + \frac{U}{r^3 \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta P) = 0 \tag{3.58}$$

Dividiendo a (3.58) por la función (3.57) se tiene que

$$\frac{r^2}{U} \partial^2_{rr} U + \frac{1}{\sin\theta P} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta P) = 0 \tag{3.59}$$

Dado que los dos sumandos son funciones de variables distintas estos deberían ser constantes por lo tanto la función en r queda

$$\frac{r^2}{U} \partial^2_{rr} U = l(l+1) \tag{3.60}$$

La soluci'on que satisface esta ecuaci'on diferencial ordinaria es $U = Ar^{l+1} + Br^{-l}$. Nótese que por el momento l puede ser cualquier número real luego veremos que dadas las condiciones de contorno que debe satisfacer la función en θ, l debe ser un número natural. Veamos la forma de la soluci'on en la parte angular, en funci'on de θ,

$$\frac{1}{\sin\theta P} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta P) = -l(l+1) \tag{3.61}$$

Realizando un cambio de variable y llamando $x = \cos\theta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_\theta P &= \partial_{\cos\theta} P \partial_\theta \cos\theta && (3.62)\\
&= -\sin\theta \partial_{\cos\theta} P && (3.63)\\
&= -(1-x^2)^{1/2} \partial_x P && (3.64)
\end{aligned}$$

la ecuación diferencial que resulta es entonces:

$$\partial_x [(1-x^2) \partial_x P] + l(l+1) P = 0 \tag{3.65}$$

esta es una ecuacion clasica del problema de Sturm-Liuville que puede encontrarse en los libros de f'isica matem'atica o la tabla Schawn, la solución a esta ecuación son los polinomios de Legendre $P_l(x)$. Este es un conjunto completo de funciones en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Los polinomios de Legendre son adem'as ortogonales entre sí. La condición de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^{1} P_l'(x) P_l(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \tag{3.66}$$

Notar entonces que los polinomios de Legendre no estan normalizados. La condición de "normalización" que satisfacen son: $P_l(1) = 1$ es decir que en el extremo superior los polinomios valen 1.

Las características y propiedades de estos polinomios pueden verse en algun libro de física matemática, e.g. Morse and Fesbach, aquí no haremos hincapie en las propiedades, salvo alguna que otra excepción, como la fórmula generatriz que veremos a continuación.

Para obtener a los polinomios proponemos que la solución a la ecuación diferencial (3.65) es una serie de potencias de la forma:

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{3.67}$$

reemplazando en la ecuación (3.65) se obtiene la relación de recurrencia para los a_j

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l+1)}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)} a_j \tag{3.68}$$

para que la serie termine y asi tener una solución finita, i.e. acotada como es esperable fisicamente, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ se necesita que l sea un entero positivo.

A partir de estos polinomios teniendo en cuenta que es un conjunto completo en $-1 \leq x \leq 1$, cualquier función dentro de este intervalo puede ser escrita como

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \tag{3.69}$$

La solución general para el problema de simetría azimutal es, $\Phi = \frac{U}{r} P$,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \tag{3.70}$$

Luego la metodología para un problema de condiciones de contorno con simetría azimutal es proponer la solución general para este tipo de problemas (3.70) para luego determinar los coeficientes A_l y B_l tal que se satisfagan las condiciones de contorno.

Supongamos un problema interno a una esfera de radio a cuyo potencial es $V(\theta)$, en este caso $B_l = 0$ ya que el potencial debe ser finito en el dominio en cuestión debido a que no hay cargas, luego los A_l se determinan imponiendo la condición de contorno es decir:

$$\Phi(r = a) = V(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) \tag{3.71}$$

debemos por lo tanto expresar a la condición de contorno $V(\theta)$ como una superposición de polinomios de Legendre y de esta manera podemos determinar los coeficientes A_l. Multiplicando entonces por $P_{l'}(\cos\theta)$ y usando la condición de ortogonalidad se tiene:

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{3.72}$$

Si el problema fuera el externo, en este caso lo que pedimos es que el potencial vaya a 0 para $r \to \infty$ por lo que se tiene que $A_l = 0$ y

$$\Phi(r=a) = V(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \tag{3.73}$$

En este caso los coeficientes B_l quedan determinados por la siguiente integral

$$B_l = \frac{(2l+1)a^{l+1}}{2} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{3.74}$$

Una alternativa como método para encontrar la solución es si conocemos la solución en una región del dominio, como los coeficientes A_l y B_l son únicos si se pueden determinar en esa región específica, éstos son los coeficientes para todo el dominio.

Supongamos por ejemplo que conocemos la solución en el eje de simetría, eje z,

$$\Phi(r, \theta = 0, \pi) = V(z) \tag{3.75}$$

en el caso de z^+, es decir $\theta = 0$, los coeficientes estan normalizados para $x = 1$, $P_l(\cos 0) = 1$, entonces se tiene que

$$\Phi(r, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \tag{3.76}$$

en el caso de z^-,es decir $\theta = \pi$, $P_l(\cos\pi = -1) = (-1)^l$ entonces

$$\Phi(r, \pi) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]. \tag{3.77}$$

Ejercicio 3.13: Resolver el problema de Laplace típico, que ya resolvimos usando funci'on de Green, una esfera que tiene potenciales opuestos. En el hemisferio superior el potencial es $+V$ y en el inferior es negativo $-V$.

3.4.1 Función de Green para un problema sin CCs con simetría azimutal

La función de Green para un problema sin condiciones de contorno, puede ser facilmente determinada de la soluci'on del potencial de una carga puntual en el espacio,

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \tag{3.78}$$

si tomamos $q = 4\pi\epsilon_0$ tenemos que la función de Green para el problema es

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{3.79}$$

La solución general es como sabemos

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')\mathrm{d}V'. \tag{3.80}$$

Si el problema a resolver tuviera simetría azimutal, es decir la densidad de carga es tal que tiene simetría azimutal lo mas conveniente es expandir la función de Green en los polinomios de Legendre (para utilizar la ortogonalidad de los polinomios).

Para determinar esta expansión haremos uso de la metodología explicada anteriormente, es decir determinamos los coeficientes en el eje z. Primero ponemos el punto carga $\vec{x}'$ en z ($\theta' = 0$) y luego expandimos en los $P_l(\cos\theta)$:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \tag{3.81}$$

Notar que en el caso en que $\vec{x}'$ no este en el eje de simetría en lugar de tener el ángulo θ tendremos el ángulo γ que es el ángulo entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{x}'$.

Ahora escribimos al vector $\vec{x}$ en el eje z en este caso

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|} \tag{3.82}$$

realizando un desarrollo de Taylor, para $r > r'$:

$$\frac{1}{r-r'} = \frac{1}{r(1-r'/r)} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l, \tag{3.83}$$

para $r < r'$:

$$\frac{1}{r'-r} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l, \tag{3.84}$$

luego en una sola ecuación escribimos que:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \tag{3.85}$$

donde debe interpretarse a $r_<$ es el menor de r y r' y en forma equivalente a $r_>$.

De esta manera hemos determinado los coeficientes A_l y B_l que dependerán de la magnitud de r' y r.

Luego podemos expresar al caso general:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{(l+1)}}P_l(\cos\gamma) \tag{3.86}$$

3.5 Problema general de simetría esférica

Comenzamos nuevamente con la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas pero ahora las condiciones de contorno y por lo tanto la solución depende de ϕ:

$$\frac{1}{r}\partial^2_{rr}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_{\phi\phi}\Phi = 0 \tag{3.87}$$

Proponemos una solución separable en sus variables

$$\Phi = \frac{U}{r}P(\theta)Q(\phi) \tag{3.88}$$

Si sustituimos la solución propuesta en la ecuación diferencial (3.85) y multiplicamos por $\frac{r^2\sin^2\theta}{UPQ}$ la ecuación resultante es

$$\sin^2\theta\left[\frac{r^2}{U}\mathrm{d}^2_{rr}U + \frac{1}{P\sin\theta}\mathrm{d}_\theta(\sin\theta\mathrm{d}_\theta P)\right] + \frac{1}{Q}\mathrm{d}^2_{\phi\phi}Q = 0 \tag{3.89}$$

La ecuación que resulta es de la forma $f(\theta, r) + g(\phi) = 0$, por lo que las dos funciones f y g tienen que ser constantes:

$$\frac{1}{Q}\mathrm{d}^2_{\phi\phi}Q = -m^2 \rightarrow Q = \exp(\pm im\phi) \tag{3.90}$$

reemplazando en (3.85)

$$\frac{r^2}{U}\mathrm{d}^2_{rr}U + \frac{1}{P\sin\theta}\mathrm{d}_\theta(\sin\theta\mathrm{d}_\theta P) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0 \tag{3.91}$$

La ecuación que debe satisfacer para la coordenada r es:

$$\frac{r^2}{U}\mathrm{d}^2_{rr}U = l(l+1) \tag{3.92}$$

Finalmente para las coordenada θ tenemos

$$\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}_\theta(\sin\theta\mathrm{d}_\theta P) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0 \tag{3.93}$$

La solución a este problema son los polinomios asociados de Legendre $P_l^m(x)$. Para que la solución sea finita en $-1 \leq x \leq 1$, l debería ser un entero positivo o 0 y $|m| \leq l$ y $-l \leq m \leq l$.

Las funciones asociadas de Legendre son un conjunto completo $-1 \leq x \leq 1$ y además son ortogonales es decir satisfacen la relación

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x)P_l^m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'} \tag{3.94}$$

notar que la ortogonalidad es para un m fijo.

Por otro lado como es bien conocido la funciones $Q_m(\phi) = \exp(im\phi)$ forma un conjunto completo de soluciones en $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Por lo tanto $P_l^m Q_m$ es un conjunto completo en la esfera unitaria para los índices l y m.

Si normalizamos en la superficie de la esfera:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\phi)e^{im\phi} \tag{3.95}$$

Los Y_{lm} son denominados ármonicos esféricos y estan normalizados en la superficie de la esfera unitaria:

$$\int \mathrm{d}\Omega Y^*_{l'm'}(\theta, \phi)Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{3.96}$$

por completitud podemos expresar a cualquier función sobre la esfera como una superposición de armónicos esféricos:

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.97}$$

donde $A_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega Y^*_{lm}(\theta, \phi)g(\theta, \phi)$.

La solución general en coordenadas esféricas es:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}]Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.98}$$

es decir que los ármonicos esféricos satisfacen la ecuación:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.99}$$

donde los autovalores son $\lambda = -l(l+1)$.

Existe una degeneración en los m ya que estos pueden ir desde $-m$ hasta m. Es decir que existen $2l+1$ estados, i.e. autofunciones, con el mismo autovalor (todos los Y_{lm} con l fijo).

3.5.1 Teorema de adición de los armónicos esféricos

El teorema de adición nos expresa un polinomio de Legendre de ángulo l en término de una combinación lineal de ármonicos esféricos:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.100}$$

Para demostrar este teorema existen varias alternativas. Jackson utiliza el hecho que los $P_l(\cos\gamma)$ satisfacen una ecuación de la forma (3.97) y por lo tanto puede ser expresada como una superposición de los armónicos esféricos para luego demostra que los coeficientes son los que establece el teorema. Una alternativa es una demostración por inducción dada por Coster y Hart la cual apareció en el AJP, 59, 1991.

3.5.2 Función de Green para un problema sin condiciones de contorno de simetría esférica

Una de las aplicaciones directas del teorema de adición es la expresión de la función de Green sin condiciones de contorno para el caso general de coordenadas esféricas, como fue demostrado:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{(l+1)}} P_l(\cos\gamma) \tag{3.101}$$

por lo que una expresión en los armónicos esféricos es obtenida facilmente reemplazando la expresión dada por el teorema de adición de los armónicos esféricos

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{(l+1)}} Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.102}$$

3.6 Función de Green en coordenadas esféricas con CCs

Queremos encontrar la solución, Función de Green, al problema general de una fuente puntual en coordenadas esféricas con condiciones de contorno triviales en S dada en coordenadas esféricas. Esto es

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x},\vec{x}') \tag{3.103}$$

con las condiciones de contorno de Dirichlet $G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0$ en S. La superficie S asumimos viene definida en coordenadas esféricas.

Ponemos el término no homogéneo, correspondiente a una carga puntual, en coordenadas esféricas

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta-\cos\theta') \tag{3.104}$$

Como los armónicos esféricos son un conjunto completo de funciones en la esfera unitaria a cualquier función $f(\theta,\phi)$ se la puede escribir como una combinación lineal de los Y_{lm}

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.105}$$

Para determinar los coeficientes A_{lm}, multiplicamos por $Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)$ a ambos lados de (3.103)

$$\int f(\theta,\phi)Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\int Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega \tag{3.106}$$

usando la ortonormalidad de los armónicos esféricos, $\delta_{ll'}\delta_{mm'} = \int Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)\mathrm{d}omega$, resulta

$$A_{lm} = \int f(\theta',\phi')Y_{lm}^*(\theta',\phi')\mathrm{d}\Omega'. \tag{3.107}$$

Si se quieren corroborar estas ecuaciones (3.103) y (3.105), se reemplazan los coeficientes (3.105) en (3.103)

$$f(\theta,\phi) = \int f(\theta',\phi') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi') \mathrm{d}\Omega' \tag{3.108}$$

finalmente se utiliza la relación de completitud

$$\delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi'), \tag{3.109}$$

demostrándose de esta manera que cualquier función en la superficie de la esfera unitaria puede ser escrita como una superposición de armónicos esféricos.

Para determinar la función de Green proponemos entonces que ésta viene expresada como una combinación lineal de los armónicos esféricos

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}(r,r',\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.110}$$

Si reemplazamos la serie en la ecuación diferencial y usando que los armónicos esféricos son funciones ortogonales por lo cual cada término de la serie debe anularse independientemente:

$$\nabla^2[A_{lm}(r,r',\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi)] = \frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.111}$$

Expandiendo el Laplaciano

$$\nabla^2(A_{lm}Y_{lm}) = \frac{Y_{lm}}{r}\partial^2_{rr}(rA_{lm}) + \frac{\nabla^2_{\theta\phi}Y_{lm}}{r^2} \tag{3.112}$$

como hemos visto $\nabla^2_{\theta\phi}Y_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm}$ resultando

$$\frac{1}{r}\partial^2_{rr}(rA_{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r'-r)Y^*_{lm}(\theta',\phi') \tag{3.113}$$

por lo que de esta forma ya nos queda definida la dependencias de A_{lm} en

$$A_{lm}(r,r',\theta',\phi') = g(r,r')Y^*_{lm}(\theta',\phi'). \tag{3.114}$$

La ecuación resultante para la parte radial es

$$\frac{1}{r}\mathrm{d}^2_{rr}(rg(r,r')) - \frac{l(l+1)}{r^2}g = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r') \tag{3.115}$$

Esta es la ecuación diferencial del problema radial, para $r = r'$ tenemos una ecuación homogénea, en cada pedazo $r > r'$ y $r < r'$ debemos proponer una solución con distintas constantes y luego tengo que satisfacer la discontinuidad en $r = r'$:

$$g_l = \begin{cases} A(r')r^l + B(r')r^{-(l+1)} & r < r' \\ A'(r')r^l + B'(r')r^{-(l+1)} & r > r' \end{cases} \tag{3.116}$$

por lo que hasta el momento tenemos la función de Green en coordenadas esféricas puede ser escrita como:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = g_l(r,r')Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta',\phi') \tag{3.117}$$

Supongamos el problema interior de la esfera.

Como no hay cargas en el origen la función debe ser finita en el interior de la esfera, i.e. $B_l = 0$. En $r = a$ $g_l(a,r') = 0$. Luego la función externa debe satisfacer que:

$$A'a^l + B'a^{-(l+1)} = 0 \tag{3.118}$$

Las soluciones resultantes son

$$g_l(r,r') = \begin{cases} A(r')r^l \\ B'(r')\left(\frac{r^l}{a^{2l+1}} - r^{-(l+1)}\right) \end{cases} \tag{3.119}$$

Por simetría las dependencias en r' deberían ser similares a las de r por lo tanto

$$g_l(r,r') = \begin{cases} Cr^l\left(\frac{r'^l}{a^{2l+1}} - r'^{-(l+1)}\right) \\ Cr'^l\left(\frac{r^l}{a^{2l+1}} - r^{-(l+1)}\right) \end{cases} \tag{3.120}$$

notar que de esta forma hemos determinado las dependencias en r' de A y B' y por lo tanto C es una constante.

Para determinar C se analiza como es el salto impuesto por la función delta en $r = r'$. La metodología en estos casos es integrar la ecuación diferencial alrededor de $r = r'$:

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \mathrm{d}^2_{rr}(rg_l)\mathrm{d}r = -4\pi\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon}\frac{\delta(r-r')}{r}\mathrm{d}r \tag{3.121}$$

donde el término proporcional a g/r se asume que es continuo por lo que no contribuye si ϵ es suficientemente pequeño.

La ecuación resultante es

$$\mathrm{d}_r(rg_l)|_{r'+\epsilon} - \mathrm{d}_r(rg_l)|_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \tag{3.122}$$

es decir que la derivada de rg_l debe tener un salto en $r = r'$. Multiplicando por r a (3.118) y derivando con respecto a r obtenemos

$$\mathrm{d}_r(rg_l)|_{r=r'} = \begin{cases} C(l+1)r'^l\left(\frac{r'^l}{a^{2l+1}} - r'^{-(l+1)}\right) \\ Cr'^l\left((l+1)\frac{r'^l}{a^{2l+1}} + lr'^{-(l+1)}\right) \end{cases} \tag{3.123}$$

Luego restando los límites por izquierda y por derecha de (3.121) se debe satisfacer que

$$C\left\{(l+1)\left[\frac{r'^{2l}}{a^{2l+1}} - r'^{-1}\right] - \left[(l+1)\frac{r'^{2l}}{a^{2l+1}} + lr'^{-1}\right]\right\} = -\frac{4\pi}{r'} \tag{3.124}$$

de donde se deduce que la constante es

$$C = \frac{4\pi}{2l+1}. \tag{3.125}$$

De esta forma hemos determinado la función de Green para un problema en coordenadas esféricas la cual puede ser expresada en forma compacta por

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r_<^l}{2l+1} \left(\frac{r_>^l}{a^{2l+1}} - r_>^{-(l+1)} \right) Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.126}$$

3.7 Problemas en coordenadas cilíndricas

El problema de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas podría ser considerado la extensión del problema de coordenadas polares que ya estudiamos. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\partial_{\rho\rho}\Phi + \frac{1}{\rho}\partial_\rho \Phi + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\phi\phi}\Phi + \partial^2_{zz}\Phi = 0. \tag{3.127}$$

Proponemos una solución a esta ecuación con variable separables

$$\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z) \tag{3.128}$$

Las ecuaciones resultantes para cada una de las variables son

$$\mathrm{d}^2_{zz} Z - k^2 Z = 0 \tag{3.129}$$

$$\mathrm{d}^2_{\phi\phi} Q + \nu^2 Q = 0 \tag{3.130}$$

Finalmente la ecuación en ρ es

$$\mathrm{d}^2_{\rho\rho} R + \frac{1}{\rho}\partial_\rho R + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \tag{3.131}$$

Las soluciones para las coordenadas z y ϕ son:

$$Z = e^{\pm kz} \tag{3.132}$$

$$Q = e^{\pm i\nu\phi} \tag{3.133}$$

Realizando un cambio de variable $x = k\rho$ la ecuación que nos queda para R es

$$\mathrm{d}^2_{xx} R + \frac{1}{x}\mathrm{d}_x R + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \tag{3.134}$$

Esta es la ecuación de Bessel (ver por ejemplo la tabla Schawm) cuya soluciones son las funciones de Bessel de orden ν:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \tag{3.135}$$

donde $x_{\nu n}$ es la raíz de $J(x_{\nu n}) = 0$.

Los coeficientes son estimados de la ecuación

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_\nu \left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) \mathrm{d}\rho \tag{3.136}$$

En general si ν es un entero las funciones linealmente independientes que se pueden tomar son las funciones de Bessel de primera clase J_ν y $J_{-\nu}$. En el caso que ν no sea entero se deben tomar también las funciones de Neumann $N_\rho(x)$ (función de Bessel de segunda clase).

Supongamos el problema de un cilindro cuya tapa en $z = l$ tiene condiciones de contorno $\Phi = V(\rho, \phi)$ y las otras caras vienen definidas por $\Phi = 0$.

Para que se anule en $z = 0$ nos queda que $Z = \sinh(kz)$

Para que nos cumpla continuidad en ϕ, $Q(0) = Q(2\pi)$, nos queda que

$$Q = A\sin(m\phi) + B\cos(m\phi). \tag{3.137}$$

Mientras la solución en la parte radial es:

$$R(\rho) = CJ_m(x_{mn}\rho/a) + DN_m(x_{mn}\rho/a) \tag{3.138}$$

La solución general es:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\sin(m\phi) + B_{mn}\cos(m\phi))J_m(k_{mn}\rho)\sinh(k_{mn}z) \tag{3.139}$$

Ahora tenemos que imponer la condición de contorno en $z = l$:

$$\begin{aligned} A_{mn} = \; & \tfrac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)\sinh(k_{mn}L)} \textstyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a \mathrm{d}\rho \\ & \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho)\sin(m\phi) \end{aligned} \tag{3.140}$$

$$\begin{aligned} B_{mn} = \; & \tfrac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)\sinh(k_{mn}L)} \textstyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a \mathrm{d}\rho \\ & \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho)\cos(m\phi) \end{aligned} \tag{3.141}$$