

Electromagnetismo

Manuel Pulido

Departamento de Física,
Universidad Nacional del Nordeste

`pulido@unne.edu.ar`

30 March 11

Ultima Actualización: June 25, 2014

Contenidos

1	Revisión de conceptos de análisis vectorial	4
1.1	Vectores	4
1.2	Transformación lineales. Transformación de vectores bajo rotaciones	7
1.3	Campos y operadores diferenciales	7
1.4	Integración en varias variables	9
1.4.1	Identidades de Green	11
1.5	Función delta de Dirac	13
2	Electrostática	14
2.1	Ley de Coulomb y principio de superposición	14
2.2	Concepto de campo	15
2.3	Ecuaciones de Maxwell	15
2.4	Estática	17
2.5	Solución del problema electrostático. Caso sin fronteras	19
2.5.1	Carga puntual	19
2.5.2	Campo eléctrico producido por una distribución de carga arbitraria. Solución general sin fronteras	22
2.5.3	Unicidad de la solución caso sin fronteras: Teorema de Helmholtz .	24
2.6	Solución general del problema electrostático. Caso con condiciones de con- torno	25
2.6.1	Unicidad de la solución	25
2.6.2	Solución general del problema. Función de Green	26
2.7	Energía potencial electrostática	27
2.7.1	Energía requerida para formar una distribución de carga	29
2.7.2	Energía potencial de N cargas en el vacío	29
3	Función de Green en distintas geometrías	33
3.1	Función de Green para el semiespacio $x > 0$	33
3.2	Función de Green para la esfera. Método de las imágenes	35
3.3	Separación de variables	38
3.3.1	Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares	38
3.3.2	Ecuación de Laplace en coordenadas polares	40

3.4	Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Simetría azimutal	42
3.4.1	Función de Green para un problema sin CCs con simetría azimutal	45
3.5	Problema general de simetría esférica	47
3.5.1	Teorema de adición de los armónicos esféricos	48
3.5.2	Función de Green para un problema sin condiciones de contorno de simetría esférica	49
3.6	Función de Green en coordenadas esféricas con CCs	49
3.7	Problemas en coordenadas cilíndricas	52
4	Multipolos	54
4.1	Expansión multipolar en coordenadas rectangulares	54
4.2	Expansión multipolar en coordenadas esféricas	56
4.3	Distribución multipolar de la energía de una distribución de cargas en un campo externo	57
5	Medios materiales	59
5.1	Modelo constitutivo	64
5.1.1	Conductividad	64
5.1.2	Constante dieléctrica	65
5.2	Energía electrostática en medios dieléctricos	65
5.2.1	Cambio de la energía electrostática debido a la presencia de un dieléctrico	67
6	Magnetostática	68
6.0.2	Ley de Ampere	69
6.0.3	Vector potencial	69
6.1	Fuerza a cargas en movimiento	71
6.2	Campo magnético de una corriente localizada	71
6.3	Campos magnéticos en medios	73
6.4	Métodos de solución de problemas magnéticos	74
6.4.1	Método del vector potencial	74
6.4.2	Potencial escalar magnético	75
6.4.3	Materiales ferromagnéticos	75
6.5	Esfera con magnetización constante	76
6.6	Campos magnéticos quasi-estáticos en conductores	78
7	Campos variables en el tiempo	80
7.1	Vector potencial	81
7.1.1	Gauge de Coulomb	82
7.1.2	Gauge de Lorenz	83
7.2	Funciones de Green para la ecuación de ondas	83
7.3	Conservación de la energía	86

7.4	Teorema de Poynting en medios dispersivos	87
7.5	Conservación del momento electromagnético	89
7.5.1	Presión de radiación	90
8	Ondas electromagnéticas	91
8.1	Ondas planas	92
8.1.1	Características de las ondas electromagnéticas	93
8.1.2	Cantidades complejas	94
8.2	Polarización de las ondas electromagnéticas	95
8.3	Propagación de ondas: velocidad de grupo	97
8.4	Desparramamiento de un pulso cuando se propaga en un medio dispersivo .	100
8.5	Ondas electromagnéticas en una interface	101
8.5.1	Onda $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia	104
8.6	Modelo físico de dispersión anómala	106
8.7	Dispersión en medios-Causalidad	107
8.7.1	Relación entre ϵ_R y ϵ_I . Kramers-Kronig	109

Capítulo 1

Revisión de conceptos de análisis vectorial

Realizamos un repaso de identidades y conceptos del cálculo vectorial que nos serán de utilidad, necesidad, durante el curso de Electromagnetismo. Como referencia del tema se puede utilizar el Capítulo 1 del Griffiths.

1.1 Vectores

Si pensamos en vectores en $\mathbb{R}^3$ y los representamos en una base particular

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1.1)$$

cuyas componentes estan expresadas en las coordenadas cartesianas.

En general a un vector en $\mathbb{R}^3$ lo podemos expresar en función de una base $\{\hat{u}_i\}$ cualquiera

$$\vec{A} = A_1 \hat{u}_1 + A_2 \hat{u}_2 + A_3 \hat{u}_3 \quad (1.2)$$

notar que el vector $\vec{A}$ es independiente de la base, sin embargo su expresión en componentes $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ si depende de la base.

Las bases que vamos a utilizar serán conformadas por vectores ortogonales y de modulo unidad $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ o $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$. A los vectores de modulo unidad los llamamos versores y los denotamos por el sombrerito.

Notación de Einstein. Se utiliza para ahorrar notación, todo doble índice lo interpretamos como una suma, y por lo tanto podemos obviar el símbolo de la suma (la sigma), es decir

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{u}_i = A_i \hat{u}_i. \quad (1.3)$$

Esto también permite trabajar facilmente en dimensiones arbitrarias por ejemplo en $\mathbb{R}^n$. Se asume que la suma recorre todas las dimensiones del espacio donde estamos trabajando, si es en $\mathbb{R}^3$ irá de 1 a 3.

Suma de vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} = A_i \hat{u}_i + B_i \hat{u}_i = (A_i + B_i) \hat{u}_i \quad (1.4)$$

Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\alpha \vec{A} = \alpha (A_i \hat{u}_i) = (\alpha A_i) \hat{u}_i \quad (1.5)$$

Producto interno. Es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Sean dos vectores $\vec{A}, \vec{B}$ en $\mathbb{R}^3$ el producto interno de estos vectores se define por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \hat{u}_i \cdot B_j \hat{u}_j = A_i B_j \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = A_i B_i \quad (1.6)$$

donde hemos aplicado la propiedad distributiva quedando una doble suma y luego usamos la ortonormalidad de la base $\{\hat{u}_i\}$,

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.7)$$

Definimos a la delta Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.8)$$

luego podemos expresar el producto interior de los vectores por

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}. \quad (1.9)$$

Notar que el resultado del producto interior de dos vectores es un escalar.

Módulo o norma de un vector. La norma de un vector es la raíz cuadrada del producto interno del vector por si mismo

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_i^2}. \quad (1.10)$$

Nota: Para la función módulo de un vector que es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ utilizamos el símbolo $|\cdot|$. Esta función es distinta de la utilizada para el módulo de un escalar aun cuando la denotemos con el mismo símbolo.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}| |\vec{B}| \quad (1.11)$$

La igualdad vale para el caso en el que los vectores sean paralelos o antiparalelos. En este caso si $\hat{u}_A$ es el versor en la dirección de $\vec{A}$, entonces podemos expresar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como

$$\vec{A} = |\vec{A}| \hat{u}_A, \quad \vec{B} = |\vec{B}| \hat{u}_A \quad (1.12)$$

El producto interior de los vectores es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \hat{u}_A \cdot \hat{u}_A = |\vec{A}| |\vec{B}| \quad (1.13)$$

El otro caso extremo es para $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, en este caso los vectores son ortogonales.

En general se tiene que

$$\cos \phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \quad (1.14)$$

donde ϕ es el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Entonces, en forma geométrica independiente de la base, el producto interior se puede expresar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \phi. \quad (1.15)$$

Producto vectorial El producto vectorial de dos vectores en la base $\hat{u}_i$ viene dado por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - B_2 A_3) \hat{u}_1 + (B_1 A_3 - B_3 A_1) \hat{u}_2 + (A_1 B_2 - B_1 A_2) \hat{u}_3 \quad (1.16)$$

Como forma mnemotécnica para el cálculo se utiliza

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

El producto vectorial se puede expresar en forma compacta usando el tensor de Levi-Civita quedando definido por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} \hat{u}_i A_j B_k \quad (1.18)$$

El tensor tridimensional anti-simétrico de Levi-Civita viene definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } (123) \\ 0 & \text{si se repite el índice} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } (123) \end{cases} \quad (1.19)$$

Permutaciones pares son 123, 231, 312. Mientras las permutaciones impares son 321, 132, 213. Como regla mnemotécnica se puede utilizar

$$\text{sgn}(\epsilon_{ijk}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Las propiedades del producto vectorial son

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}), \quad (1.21)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \times \vec{B}) \vec{C}, \quad (1.22)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}), \quad (1.23)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (1.24)$$

Este último producto triple es el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores. Este volumen da 0 si dos de los vectores son paralelos entre sí.

1.2 Transformación lineales. Transformación de vectores bajo rotaciones

Un tensor afin T de rango 2 es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si misma, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, especificada por una matriz real de 3×3 , T_{jk} dada por

$$\tilde{\vec{A}} = T \vec{A} \quad (1.25)$$

en componentes vale que

$$\tilde{A}_j = (T \vec{A})_j = T_{jk} A_k. \quad (1.26)$$

Ejemplo. Cuando queremos realizar una rotación de los ejes, ¿cómo quedará expresado el vector en un nuevo sistema de coordenadas rotado?. En primera medida cabe recordar que los vectores no se transforman, lo que cambia son las componentes en la base rotada.

Supongamos que rotamos los ejes de coordenadas $x - y$ en un ángulo ϕ la transformación de las componentes del vector $\vec{A}$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

1.3 Campos y operadores diferenciales

Definimos el operador vectorial (un bicho que se come funciones escalares o vectoriales) por

$$\nabla = \hat{u}_i \partial_{u_i}. \quad (1.28)$$

Si aplicamos el operador a una función escalar lo que tenemos es un vector gradiente. Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector lo que tenemos es la divergencia, mientras que si lo aplicamos a través del producto vectorial a un vector lo que tenemos es el rotor.

Gradiente Si aplicamos el operador nabla a un función escalar $\phi(\vec{x})$ lo que obtendremos es un campo vectorial definido por

$$\nabla \phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{u}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{u}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{u}_3. \quad (1.29)$$

Esta definición es dependiente de las coordenadas que se utilizan, una definición independiente es

$$\vec{A} \cdot \nabla \phi(\vec{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\phi(\vec{x} + \epsilon \vec{A}) - \phi(\vec{x})] / \epsilon \quad (1.30)$$

para todo vector $\vec{A}$ en $\mathbb{R}^3$.

El gradiente de ϕ en un punto $\vec{x}$, apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función ϕ en $\vec{x}$. Es decir apunta hacia la cima, mientras $-\nabla \phi$ apunta hacia el valle. La magnitud del vector nos da la razón de crecimiento de la función escalar.

Divergencia Si aplicamos el operador nabla a través del producto interno a un vector tenemos una función escalar definida por

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A} &= (\hat{u}_i \partial_{u_i}) \cdot (A_j \hat{u}_j) \\
 &= \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j \partial_{u_i} A_j \\
 &= \delta_{ij} \partial_{u_i} A_j \\
 &= \partial_{u_i} A_i
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

La divergencia es una medida de como el campo vectorial sale/diverge del punto en cuestión, esta estrechamente relacionada a la integral de superficie, en una pequeña superficie cerrada que rodea al punto, cualquier diferencia en esta superficie entre los campos salientes y entrantes serán interpretados como una divergencia o convergencia del campo vectorial.

Las fuentes (líneas salientes de un punto) tienen divergencia positiva, los sumideros (líneas congruentes a un punto) divergencia negativa.

?

Faltan graficos

Rotor El rotor proviene de la aplicación del operador nabla a través del producto vectorial a un campo vectorial, el cual da como resultado un vector dado por

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{x}) = \det \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Reglas de la derivación En general para demostrar las reglas de derivación del análisis vectorial se trata de escribir en componentes y utilizar los resultados del cálculo de una variable. De gran utilidad es la notación de Einstein.

Ejemplos.

(a)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \partial_{u_i} (\phi A_i) \\
 &= \partial_{u_i} \phi A_i + \phi \partial_{u_i} A_i \\
 &= \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado que la derivada del producto es el producto de las derivadas en 1D.

(b)

$$\begin{aligned}
 [\nabla \times (\phi \vec{A})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k) \\
 &= \epsilon_{ijk} [\partial_j \phi A_k + \phi \partial_j A_k] \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_j \phi A_k + \phi (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) \\
 &= (\nabla \phi \times \vec{A})_i + \phi (\nabla \times \vec{A})_i
 \end{aligned}$$

donde hemos usado derivada de un producto, para luego realizar distributiva y finalmente asociar a rotores los términos resultantes.

1.4 Integración en varias variables

Integral de línea. Integral de un campo vectorial a lo largo de un camino, esta puede ser entre dos puntos a y b , $\int_a^b \vec{V} \cdot d\vec{l}$ o a lo largo de un camino cerrado $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$.

Si el campo vectorial es conservativo la integral de línea es independiente del camino.

Integral de superficie Integral de un campo vectorial en una superficie, $\int_S \vec{V} \cdot d\vec{s}$ donde $d\vec{s}$ es un vector normal a la superficie que apunta hacia afuera de ésta.

Teorema fundamental de Gauss o de la divergencia Si tenemos un volumen V en $\mathbb{R}^3$ que es cerrado y acotado con borde S suave y $\vec{A}$ es un campo vectorial en V que es continuamente diferenciable, entonces

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.33)$$

La integral de la divergencia de un campo vectorial en un volumen es igual a la integral del campo vectorial en la superficie que encierra a dicho volumen.

En general, la integral de superficie es el flujo del campo vectorial a través de la superficie, y puede ser expresado por

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{u}_n ds = \oint_S A_n ds \quad (1.34)$$

donde $\hat{u}_n$ es el versor normal saliente de la superficie y A_n es la componente del campo vectorial en la dirección normal saliente.

El flujo eléctrico saliente de una superficie esta relacionado a la divergencia del campo eléctrico en el interior. El flujo saliente de un fluido incomprensible es igual a la cantidad de fluido que se esta inyectando dentro del volumen.

La suma de las divergencias en todos los puntos adentro del volumen se cancelarán y solo me quedarán las contribuciones de la superficie.

Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada, cerrada y acotada con borde Γ suave y $\vec{V}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en una region que contiene a S y su frontera entonces

$$\int_S \nabla \times \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (1.35)$$

la integral de línea puede ser expresada por

$$\oint_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_\Gamma v_t dl \quad (1.36)$$

donde v_t es la componente tangencial a la curva Γ , y la integral de línea se interpreta como la *circulación* del campo vectorial a lo largo de la curva cerrada Γ .

El teorema se puede pensar como que: la suma de pequeños vórtices ubicados en la superficie S es igual a la circulación en la curva cerrada que encierra a la superficie. En el caso en que $\nabla \times \vec{V} = 0$ en S (el rotor es 0 para todo punto de S), entonces el campo es irrotacional, y esta libre de vórtices.

Campo vectorial conservativo. Si el campo vectorial $\vec{V}$ puede ser expresado como $\vec{V} = \nabla\phi$ entonces ϕ es el potencial del campo vectorial y se dice que $\vec{V}$ es conservativo.

Corolario 1. Los campos vectoriales conservativos son irrotacionales. Supongamos existe una ϕ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$, entonces tenemos que el campo conservativo satisface $\nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla\phi = 0$. Por lo que un campo vectorial conservativo es irrotacional.

Corolario 2. Para campos conservativos las integrales de línea entre dos puntos son independientes del camino. Demostremos este enunciado. Sea la integral de línea entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a lo largo de una curva Γ_1 que va entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si elegimos otra curva entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, Γ_2 entonces la integral

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} - \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.37)$$

donde ambas curvas Γ_1 y Γ_2 se interpretan desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$, por lo que para la integración desde $\vec{b}$ hasta $\vec{a}$ se realiza con signo positivo. Además en la segunda igualdad de (1.37) se usó el teorema de Stokes y luego en la tercera igualdad se usó que $\nabla \times \vec{V} = 0$ (Corolario 1). Entonces tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (1.38)$$

Notar que para que valga este resultado el rotor del campo debe ser 0 en *toda* la superficie comprendida entre Γ_1 y Γ_2 .

El lector se preguntará entonces si vale la afirmación inversa, ¿todo campo vectorial irrotacional será conservativo? la respuesta es no siempre, solo para el caso en el que la región donde el campo es irrotacional sea simplemente conexa. Como contraejemplo, supongamos un toro o donut/rosquilla de Homero, en ese caso no tenemos garantizado si la integración es por fuera de la donut que el campo sea conservativo.

En el caso en que la región sea simplemente conexa vale el teorema siguiente:

Teorema Si $\nabla \times \vec{V} = 0$ en una región simplemente conexa V donde $\vec{V}$ es continuamente diferenciable, entonces para $\vec{p}$ en V , la integral de línea

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{x}} \vec{V} \cdot d\vec{s}, \quad (1.39)$$

es independiente de la curva que une a $\vec{p}$ con $\vec{x}$ y se puede definir un potencial de $\vec{V}$ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende de ϕ .

Esta claro ahora que si tenemos un campo vectorial que está libre de vórtices en una región simplemente conexa, entonces podemos aplicar el razonamiento inverso, es decir en la región interna a la de las curvas Γ_1 y Γ_2 *todo* punto del campo vectorial será irrotacional y por lo tanto la integral de línea cerrada es 0 de lo cual se deduce que las integrales de línea entre los dos caminos Γ_1 y Γ_2 son iguales. En el caso en que el dominio en el que el campo sea irrotacional no sea simplemente conexo no tenemos garantía que la integral cerrada se anule.

Ahora supongamos que tenemos un campo vectorial que existe un campo vectorial $\vec{A}$ tal que el campo $\vec{V}$ se puede escribir de la forma $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$ luego se deduce que $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, *el campo es solenoidal*. Vale la pregunta inversa también en este caso, ¿será que todo campo vectorial solenoidal se puede escribir como el rotor de un campo vectorial? La respuesta es equivalente al anterior planteo. Si la región V donde se cumple que el campo es solenoidal tiene la propiedad que cualquier superficie cerrada en S encierra un volumen cuyos puntos son todos pertenecientes a la región V entonces vale, es decir el campo vectorial solenoidal puede ser escrito como un rotor de otro campo vectorial.

1.4.1 Identidades de Green

Si proponemos al campo vectorial dado por dos funciones escalares ϕ, ψ :

$$\vec{A} = \phi \nabla \psi \quad (1.40)$$

Luego reemplazamos esta expresión en el teorema de la divergencia:

$$\int \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \nabla \psi \cdot \hat{n} ds \quad (1.41)$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a la superficie.

Expandiendo la primera integral en (1.41) obtenemos:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi \partial_n \psi ds \quad (1.42)$$

donde $\partial_n \psi$ es la derivada de ψ en la dirección normal a la superficie.

La ecuación (1.42) es conocida como la primera identidad de Green.

La segunda identidad de Green se obtiene a partir de aplicar la primera identidad de Green a $\vec{A} = \phi \nabla \psi$ y a $\vec{A} = \psi \nabla \phi$, en este último caso la primera identidad de Green se lee

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV = \oint_S \psi \partial_n \phi ds \quad (1.43)$$

Restando (1.42) menos (1.43) resulta la segunda identidad de Green:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S (\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi) ds \quad (1.44)$$

Teorema de Helmholtz Si $\vec{V}$ es un campo vectorial continuamente diferenciable del cual conocemos su divergencia y su rotor y éstos se van a 0 en el infinito (al menos como r^{-3}), entonces, este campo vectorial queda univocamente determinado cuando especificamos su divergencia y su rotor.

Demostración. Demostremos que el campo $\vec{V}$ lo podemos descomponer y escribir como la suma de un campo solenoidal y de un campo irrotacional $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \quad (1.45)$$

Entonces si encontramos a la función escalar ϕ y además encontramos al campo vectorial $\vec{A}$ hemos logrado la descomposición.

Si aplicamos la divergencia a (1.45) tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \phi \quad (1.46)$$

es decir que si tenemos como dada a $\nabla \cdot \vec{V}$, debemos determinar la ϕ que satisface la ecuación de Poisson. La ϕ se determina de

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} dV' + \oint_S \left[\phi \partial_n(r^{-1}) - \frac{\partial_n \phi}{r} \right] ds' \quad (1.47)$$

donde $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Esta solución se puede encontrar utilizando la segunda identidad de Green, en la cual se toma una función escalar como ϕ y la segunda función escalar como $\psi = 1/r$. Ver Ejercicio.

En un problema sin condiciones de contorno la superficie S puede ser pensada como una esfera cuyo radio tiende a ∞ como tenemos que $\nabla \cdot \vec{V} \rightarrow r^{-3}$ para $r \rightarrow \infty$ entonces $\phi \rightarrow r^{-1}$ para $r \rightarrow \infty$. La integral de superficie se anula (sin embargo si es importante para cuando tenemos condiciones de contorno). Luego se tiene que

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} dV' \quad (1.48)$$

Ahora pasamos a la demostración de la existencia de $\vec{A}$, aplicando $\nabla \times$ a la expresión (1.45) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{aligned} \quad (1.49)$$

como $\vec{A}$ esta determinada a menos de un gradiente, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$, manteniendose el mismo rotor $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$, entonces podemos elegir a ψ tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Supongamos que $\nabla \times \vec{A} \neq 0$, luego se tiene que $\nabla \cdot (\vec{A}' + \nabla\psi) = \gamma$, Entonces puedo resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 \psi = \gamma$, encontrando a ψ y por lo tanto vale que $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$.

Luego la ecuación resultante es

$$\nabla \times \vec{V} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (1.50)$$

pero estas son tres ecuaciones de Poisson, entonces bajo los mismos argumentos podemos encontrar que

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{V}}{r} dv \quad (1.51)$$

Entonces por un lado hemos demostrado que existen ϕ y $\vec{A}$ tal que el campo vectorial lo puedo descomponer en (1.45) por otro lado hemos demostrado que si conocemos a $\nabla \cdot v$ y $\nabla \times \vec{V}$ podemos determinar a $\vec{V}$.

Este resultado es de fundamental importancia en electrostática donde tendremos especificado la divergencia y el rotor del campo eléctrico y a partir de estos determinaremos al campo. Notar que la demostración realizada aquí, asume un dominio no acotado y totalmente abierto. Mas adelante durante el curso veremos el caso general a dominios con condiciones de contorno.

1.5 Función delta de Dirac

Es una función impropia que tiene las siguientes propiedades,

- (a) $\delta(x - a) = 0$ si $x \neq a$
- (b) $\int \delta(x - a)dx = 1$ si la región de integración contiene al punto a y es 0 si no lo contiene.

Dadas estas dos propiedades la delta de Dirac es clasificada como una distribución o función generalizada. Puede ser pensada como el límite de funciones cuyo ancho disminuye mientras su altura crece acordeamente tal que el área integrable se conserve.

Algunas propiedades derivables importantes de la delta:

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a)$
- (b) $\int f(x)\delta'(x - a)dx = -f'(a)$
- (c) $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$ k una constante.
- (d) $\delta(f(x)) = \sum_i \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|^{-1} \delta(x - x_i)$ donde x_i son las raíces de $f(x)$.
- (e) $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)dk$

Ejemplo.

Si $k > 0$ entonces propongo como cambio de variables $y = kx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y)dy/k \\ &= f(0)/k \end{aligned} \tag{1.52}$$

Si $k < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)dx &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(y/k)\delta(y)dy/k \\ &= -f(0)/k. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Capítulo 2

Electrostática

2.1 Ley de Coulomb y principio de superposición

Si tenemos dos cargas q_1 y q_2 existirá una interacción eléctrica entre estas cargas que produce una fuerza de la forma

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21} \quad (2.1)$$

donde r_{12} es la distancia entre las dos cargas, y $\hat{r}_{21}$ es la dirección entre las cargas desde la carga q_2 hacia la carga q_1 , $\vec{F}_1$ es la fuerza que siente la carga q_1 . Esta es la famosa ley de Coulomb y explica la interacción eléctrica estática entre cargas, fue propuesta a partir de numerosas observaciones de fenómenos eléctricos y ha sido extensivamente corroborada. En particular la dependencia con la inversa del cuadrado a la distancia r^{-2} , siendo el exponente -2 una expresión muy precisa, es decir se ha corroborado el exponente -2 experimentalmente con numerosos decimales.

¿Que sucede si ahora introducimos una tercera carga q_3 en el sistema? ¿Cual es la fuerza que sentirá q_1 ? Si solo estan las cargas q_1 y q_2 tenemos la expresión (2.1). Si ahora solo tenemos en el sistema a las cargas q_1 y q_3 entonces tendremos una expresión similar a (2.1),

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{31}. \quad (2.2)$$

¿Podemos suponer que la fuerza total que se le ejerce es la suma de $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{13}$? ¿Es decir existen interacciones eléctricas entre las cargas q_2 y q_3 que puedan alterar la fuerza que se ejerce sobre q_1 cuando q_2 y q_3 actúan juntas sobre q_1 ?

La respuesta es no hay efectos secundarios, ni interacciones, y se puede asumir que las cargas actúan independientemente. En efecto este es un principio muy general en el electromagnetismo, denominado *principio de superposición*, y ha sido evaluado y comprobado en numerosas situaciones experimentales. De aquí en más asumimos la validez de este principio en el electromagnetismo y toda la teoría electromagnética se construye en base a este. Expresado de otra manera el principio de superposición, nos dice que los

efectos electromagnéticos o los campos eléctricos y magnéticos van a ser lineales. Veamos entonces a que nos estamos refiriendo por *campos*.

2.2 Concepto de campo

Supongamos que queremos aislar los efectos que produce una distribución de cargas de la distribución de carga en sí, incluso podrían existir dos distribuciones de carga que produzcan el mismo efecto por lo que nuestro interés es olvidarnos de la distribución de cargas y concentrarnos solamente en los efectos que éstas producen.

Si ponemos una carga de prueba en una posición arbitraria dentro de un sistema que contiene una distribución de carga, la carga de prueba sentirá los efectos eléctricos de la distribución de carga de tal manera que la distribución de carga le realizará una fuerza a la carga de prueba dada por

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.3)$$

donde $\vec{E}(\vec{x})$ es el efecto de la distribución de carga en la posición $\vec{x}$ donde ubicamos a la carga q .

Entonces podemos definir el campo eléctrico en el punto $\vec{x}$ por

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.4)$$

La carga de prueba debe ser lo suficientemente pequeña como para que no altere los efectos del campo eléctrico existente.

¿Por que es de tanta importancia el concepto de campo?

- Dos distribuciones de cargas distintas pueden producir exactamente los mismos efectos.
- Los campos electromagnéticos pueden existir en regiones donde no hay cargas. Los campos pueden incluso transportar momento y energía y pueden existir aun en el vacío.
- Todos los procesos electromagnéticos pueden ser tratados a través del campo eléctrico y magnético.

2.3 Ecuaciones de Maxwell

Vamos a establecer las ecuaciones que gobiernan los procesos electromagnéticos, denominadas ecuaciones de Maxwell, estas ecuaciones en principio las tomaremos como un conjunto de postulados, a pesar que por supuesto han sido derivadas a través numerosos esfuerzos observacionales y teóricos.

Sea una distribución de carga $\rho(\vec{x})$ y una densidad superficial de corriente $\vec{J}(\vec{x})$ que están en el vacío, las ecuaciones que gobiernan los campos electromagnéticos son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{J} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío y μ_0 es la permitividad en el vacío. La velocidad de la luz en el vacío viene dada por $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$.

- ρ es la densidad de carga volumétrica es decir tiene unidades de carga por unidad de volumen. En general la denominaremos distribución de carga.
- $\vec{J}$ es la densidad superficial de corriente, tiene unidades de carga por unidad de tiempo y superficie.

Las ecuaciones (2.5)-(2.8) son las ecuaciones de Maxwell que nos determinan los campos eléctricos y magnéticos y su evolución en el tiempo. Las incógnitas son las 3 componentes del campo eléctrico, $\vec{E}$, y las tres componentes del campo magnético, $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de 8 ecuaciones, las cuales por supuesto no son todas linealmente independientes (dado que existen solo 6 incógnitas, si fueran linealmente independientes entonces el sistema no tendría solución), de las 8 ecuaciones solo 6 son linealmente independientes.

Se debe notar que los términos fuentes, términos no-homogéneos de las ecuaciones, es decir aquellos que son generadores de los campos son:

- La distribución de cargas ρ/ϵ_0
- La distribución de corrientes $\mu_0\vec{J}$

Estos términos son los datos, son prescripciones del problema y actúan como las fuentes de los campos. También el problema debe explicitar las condiciones de contorno, en el caso que se requiera la solución en un dominio acotado. Si el problema es en el espacio libre, en $\mathbb{R}^3$ se pide que la densidad y corrientes sean acotadas, es decir que decaigan a 0 en el infinito (ver Teorema de Helmholtz en el capítulo 1).

Las ecuaciones de Maxwell son lineales en las variables incógnitas $\vec{E}$ y $\vec{B}$, esto significa que una superposición lineal de soluciones es también solución, que por supuesto esto está basado en el principio de superposición.

Los términos de las variaciones temporales de los campos, (2.6) y (2.7) son los que acoplan las ecuaciones, notar que las variaciones temporales del campo eléctrico producen campo magnético (2.6) y viceversa (2.7).

No existen cargas magnéticas (monopolos), razón por la cual el término no-homogéneo en la ecuación del divergencia del campo magnético es nulo.

La conservación de la carga esta implícita en las ecuaciones de Maxwell, (2.5)-(2.8), en efecto si aplicamos el operador divergencia a (2.6),

$$-\epsilon_0 \partial_t \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{J} \quad (2.9)$$

Si usamos (2.5) y reemplazamos en (2.9), se tiene

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.10)$$

Esta es la expresión general de la conservación de la carga, si integramos en un volumen, lo que obtenemos es que

$$\partial_t Q + \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.11)$$

donde $Q = \int_V \rho dV$ y se ha usado el teorema de Gauss. Esta expresión (2.11) nos dice que los cambios de la carga total que esta localizada en el volumen V se deben unicamente al flujo de cargas que atravieza la superficie S (contorno de V). Es decir, que si tenemos un flujo entrante de cargas positivas la carga total encerrada aumentará, mientras una salida de carga disminuirá la carga neta total localizada dentro del volumen. Esta es la única posibilidad de variación de la carga a través del transporte, pero no pueden ni aparecer ni desaparecer, solo transportarse de un lugar a otro.

En el caso que también exista en el espacio un campo magnético, la fuerza que se ejerce sobre la carga viene dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.12)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la carga y $\vec{B}$ es el campo magnético. Ésta expresión es conocida por *fuerza de Lorentz*.

La expresión de la fuerza de Lorentz es discutida en el marco general del electromagnetismo con la relatividad espacial y existen expresiones alternativas como la ley de Einstein-Laub que es una generalización de la de Lorentz. Para una discusión de este aspecto ver un trabajo reciente sobre el tema, Mansuripur (2012)¹

2.4 Estática

Si la distribución de cargas y corrientes son independientes del tiempo, éstas producirán campos eléctricos y magnéticos que son independientes del tiempo es decir los términos de las ecuaciones $\partial_t \vec{E}$ y $\partial_t \vec{B}$ se anulan y por lo tanto las ecuaciones se reducen a:

¹Mansuripur, 2012: Trouble with the Lorentz law of force: Incompatibility with special relativity and momentum conservation, *Physical Research Letters*, **108**, 193901.

cuatro ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.14)$$

y cuatro para el campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

La conclusión mas importante que se puede deducir es que los campos eléctricos y magnéticos están desacoplados para el caso estático. Esta es la razón por la cual históricamente los fenómenos eléctricos se consideraban de una naturaleza independiente de los fenómenos magnéticos hasta que los experimentos de Faraday con corrientes que variaban en el tiempo permitieron comprender que ambos fenómenos en el fondo estaban ligados intrínsecamente.

La primera parte de esta materia la dedicaremos a estudiar la electrostática es decir aquellos fenómenos que están gobernados por las ecuaciones (2.13) y (2.14).

El teorema de Helmholtz nos garantiza que si se especifica la divergencia de un campo vectorial y el rotor de ese campo es posible determinar el campo unívocamente si el campo cumple ciertas condiciones de decaimiento lejos de las distribuciones de carga r^{-2} . Alternativamente se pide que la divergencia del campo decaiga como r^{-3} .

La resolución de problemas de electrostática se suele simplificar a través de la introducción de un potencial eléctrico esto es una función escalar Φ que esta definida por:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (2.17)$$

donde entonces por su propia definición se verifica que

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla\Phi = 0 \quad (2.18)$$

esto es cualquier potencial eléctrico, dada la forma en que lo definimos satisface trivialmente la ecuación de rotor del campo igual a 0.

De esta manera la única ecuación que debería satisfacer el potencial es (2.13) reemplazando en esta ecuación la definición 2.17 se obtiene:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (2.19)$$

Esta es la conocida ecuación de Poisson. Si la distribución de cargas es nula se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.20)$$

en este caso para que la solución no sea la trivial deberían existir condiciones de borde que deba satisfacer el campo eléctrico, las cuales discutiremos mas adelante.

Notar que la definición del potencial eléctrico nos permite una fuerte simplificación del problema electrostático, de hecho pasamos de tener 3 variables incógnitas (E_x, E_y, E_z) a tener que resolver una ecuación solo para Φ . Esto se debe a que estas variables no son independientes por lo que con determinar una sola función escalar Φ ya es posible determinar las tres componentes del campo eléctrico. La restricción que nos permite pasar de tres variables a una sola variable incógnita es el hecho que el campo es irrotacional. Esta restricción son tres ecuaciones de las cuales solo dos son linealmente independientes.

2.5 Solución del problema electrostático. Caso sin fronteras

Queremos encontrar el campo eléctrico para un sistema compuesto por una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ en el espacio abierto y no existen condiciones de contorno.

Todo lo que conocemos es que el campo eléctrico debería satisfacer

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.22)$$

2.5.1 Carga puntual

Supongamos que tenemos una carga puntual q ubicada en el origen, proponemos como ansatz que el campo eléctrico de la carga puntual es:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (2.23)$$

La densidad de carga de una carga puntual es:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}) \quad (2.24)$$

Tratemos ahora de demostrar que efectivamente (2.23) es la solución. Si (2.23) satisface la ecuación de la divergencia (2.21), se tiene que

$$\nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x}) \quad (2.25)$$

por lo que deducimos se debe demostrar que:

$$\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = 4\pi\delta^3(\vec{x}). \quad (2.26)$$

En coordenadas esféricas la divergencia de un campo vectorial $\vec{V} = V_r\hat{u}_r + V_\theta\hat{u}_\theta + V_\phi\hat{u}_\phi$ se expresa como:

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi V_\phi \quad (2.27)$$

Luego para $r > 0$ se tiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^{-2}) = 0 \quad (2.28)$$

Sin embargo en el origen la función $\frac{\hat{r}}{r^2}$ no está acotada. Si integramos alrededor del origen con una esfera de radio R , además usando el teorema de Gauss (el cual es válido para $r > 0$) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{V_R} \nabla \cdot \vec{V} dV &= \int_{S_R} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

Luego hemos demostrado que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{x}) \quad (2.31)$$

Entonces interpretando este resultado a la luz del electromagnetismo, en particular de la ecuación (2.21), se tiene que una densidad de carga dada por una carga puntual en el origen: $\rho = 4\pi\epsilon_0 \delta^3(\vec{x})$ genera un campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{x}}{r^3}. \quad (2.32)$$

Continuemos por el próximo caso más simple posible; una carga puntual ubicada en $\vec{x}_0$, la distribución de carga correspondiente a la carga puntual se puede escribir en la forma:

$$\rho(\vec{x}) = q \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.33)$$

Es decir que las ecuaciones resultantes son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = q/\epsilon_0 \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.34)$$

Ya hemos demostrado que $\nabla \cdot (\hat{x}/|\vec{x}|^2) = \delta^3(\vec{x})$ es decir ya conocemos que la divergencia del campo $\hat{x}/|\vec{x}|^2$ nos da la función delta de Dirac. Dejamos como ejercicio su generalización a un caso relativo a $\vec{x}_0$.

Ejercicio 2.1: Extender el resultado al caso relativo a un vector $\vec{x}_0$: $\nabla \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^3 = 4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ donde el ∇ representa la derivada con respecto a $\vec{x}$.

Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio, y multiplicando al campo $(\vec{x} - \vec{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^3$ por q/ϵ_0 podemos proponer como solución del campo eléctrico a:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\hat{x} - \hat{x}_0)/|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 \quad (2.35)$$

por construcción entonces esta ecuación cumple con la primera ecuación de la electrostática (2.21), ¿cumplirá con las otras tres, (2.22), es decir este campo libre de vórtices?

Ejercicio 2.2: Demuestre que $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) = -\frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$.

Dado el ejercicio 2.2 aplicamos el rotor:

$$\nabla \times \vec{E} = q/(4\pi\epsilon_0) \nabla \times \nabla \left[\frac{\hat{x} - \hat{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right] \quad (2.36)$$

Dado que el rotor de un gradiente es siempre 0 (ejercicios) se tiene que el campo eléctrico encontrado satisface:

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.37)$$

Entonces la solución del campo eléctrico de una carga puntual es la dada por (2.35). Si en esta solución ponemos el origen del sistema de coordenadas en donde se ubica la carga resulta que el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2}. \quad (2.38)$$

Claramente las líneas del campo son entrantes/salientes a la carga.

El ejercicio 2.2 nos permite determinar el potencial eléctrico de una carga puntual, definamos al potencial eléctrico por $\vec{E} = -\nabla\Phi$, entonces

$$-\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{x}}{|\vec{x}|^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) \quad (2.39)$$

Entonces a menos de una constante aditiva el potencial eléctrico de una carga puntual viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (2.40)$$

Si tenemos una carga de prueba q_p inmersa en el campo generado por la carga generadora del campo q (2.38), se tiene que la fuerza que se ejercen entre si, de (2.3) y (2.38) es dada por

$$\vec{F} = q_p \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_p \frac{\hat{x}}{r^2} \quad (2.41)$$

esta es la conocida ley de Coulomb que nos da la fuerza que se ejercen dos cargas puntuales. La dirección $\hat{x}$ debería ser interpretada como la dirección que liga a las cargas, desde la carga q a la carga q_p (interpretamos que $\vec{F}$ es la fuerza que se ejerce sobre q_p), mientras r es la distancia entre las cargas. Ver sección 2.1 para mas detalles sobre la ley de Coulomb.

Hemos demostrado entonces que la ley de Coulomb esta de acuerdo con las ecuaciones de electrostática. También es interesante desarrollar el camino inverso, partiendo de la ley de Coulomb llegar a las ecuaciones de electrostática. Se deja como ejercicio para el lector motivado.

Demostración utilizando el teorema de Gauss

Si integramos en un volumen arbitrario a la ec. (2.21) resulta

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho dV. \quad (2.42)$$

En el lado derecho de esta ecuación (2.42) tenemos la integral en volumen de la densidad volumétrica de carga, por lo que esta es la carga total encerrada en el volumen V la cual denotaremos por Q .

Aplicando ahora el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la ecuación (2.42) resulta que

$$\int_V \vec{E} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0^{-1} Q \quad (2.43)$$

este es el resultado conocido en electromagnetismo como el teorema de Gauss. Una lectura física de este teorema nos dice que el flujo de campo eléctrico en una superficie cerrada esta *absolutamente* determinado por la carga encerrada en dicha superficie. El campo en V es totalmente independiente de las cargas externas a la superficie.

Asumamos que tenemos como volumen una superficie esférica S de radio R alrededor de la carga con centro en la carga luego:

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot d\vec{s} &= |\vec{E}| R^2 \int d\Omega \\ &= |\vec{E}| 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Entonces, el módulo del campo eléctrico de una carga puntual q viene dado por

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2. \quad (2.45)$$

Dadas las características del teorema de Gauss, las líneas de superficie del campo eléctrico deben ser entrantes o salientes a una carga puntual de lo contrario el campo podría depender de las cargas externas. Entonces la dirección del campo es $\hat{r}$ (versor de coordenadas esféricas, saliente del origen).

Luego el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q/R^2 \hat{r}. \quad (2.46)$$

2.5.2 Campo eléctrico producido por una distribución de carga arbitraria. Solución general sin fronteras

Para generalizar el resultado obtenido en (2.38) utilizamos el principio de *superposición lineal*, es decir si existen varias cargas el campo eléctrico solución será la suma de los campos producidos por cada una de las cargas por separado. Supongamos que el lugar de

observación es $\vec{x}$ y la ubicación de las N cargas q_i es $\vec{x}_i$ entonces el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \quad (2.47)$$

En el caso que tengamos una distribución de cargas continuas la suma pasa a ser una integral en volumen y $q_i \rightarrow \rho dV$,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' \quad (2.48)$$

donde $\vec{x}'$ es la posición de la carga infinitesimal $\rho(\vec{x}')dV'$, la integración se realiza en $\vec{x}'$. En general a la posición $\vec{x}'$, la llamaremos punto fuente, ya que es donde se ubican las cargas que son generadoras del campo eléctrico. Mientras $\vec{x}$ es el lugar donde se mide el campo eléctrico y es un vector fijo a los fines de la integración. A $\vec{x}$ en este contexto lo llamaremos el punto observación.

La ecuación (2.48) es *la solución general del problema electrostático para cualquier distribución de cargas sin condiciones de contorno*. Dada la distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ se puede obtener el $\vec{E}$ a través de (2.48) que por construcción satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de la electrostática (2.21) y (2.22).

Si se quiere determinar el potencial eléctrico de una distribución de cargas arbitraria nuevamente utilizamos el resultado del ejercicio 2.2, $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$, para expresar el campo eléctrico en la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.49)$$

donde se ha usado que el operador ∇ es la derivada en $\vec{x}$, y por lo tanto independiente de la integral que se realiza en la variable $\vec{x}'$.

Luego dada la definición del potencial $\vec{E} = -\nabla\Phi$ se determina que

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.50)$$

este potencial queda definido a menos de una constante, sin embargo dado que estamos en un problema sin CCs se suele tomar como potencial en el infinito $\Phi = 0$ lo que determina esta constante. De todas maneras nótese que lo único físico aquí es el campo eléctrico $\vec{E}$ por lo que el potencial es solo una metodología de resolución por el momento y aun no tiene significado físico.

Si quisiéramos demostrar que (2.50) satisface la ecuación de Poisson. Apliquemos a esta ecuación el operador laplaciano:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.51)$$

Como ya hemos visto $\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$

Recordando que $\int_V f(\vec{x}')\delta(\vec{x} - \vec{x}')dV' = f(\vec{x})$ resulta

$$\nabla^2\Phi = -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (2.52)$$

Entonces reobtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (2.53)$$

2.5.3 Unicidad de la solución caso sin fronteras: Teorema de Helmholtz

En la unidad 1, hemos visto que vale la relación

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.54)$$

si comparamos con la ecuación de Poisson (2.53), se determina que para una carga puntual $q = 4\pi\epsilon_0$ ubicada en $\vec{x}'$, o equivalentemente una distribución de carga dada por $\rho(\vec{x}) = 4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, la solución, potencial eléctrico, es:

$$\Phi_p = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.55)$$

En lugar de usar el principio de superposición directa vamos a utilizar la segunda identidad de Green, (1.44), tomando como funciones $\phi = \Phi$ el potencial eléctrico general y $\psi = \Phi_p = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ el potencial electrico de una cara puntual $q = 4\pi\epsilon_0$, tenemos

$$\int_V \left[\Phi \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{\nabla^2 \Phi}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' = \oint_S \left[\Phi \partial_n \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{\partial_n \Phi}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] ds'. \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta que $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ y que $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$ y despejando se obtiene

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\Phi(\vec{x}') \partial_n \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{\partial_n \Phi}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] ds'. \quad (2.57)$$

Si $\Phi \rightarrow r^{-1}$ cuando $r \rightarrow \infty$, entonces las integrales de superficie se anulan para un problema sin condiciones de frontera. El potencial eléctrico resultante para una distribución de carga arbitraria ρ es

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (2.58)$$

2.6 Solución general del problema electrostático. Caso con condiciones de contorno

Hasta el momento, entonces, hemos encontrado la solución general para el problema sin condiciones de contorno en la vida real los problemas suelen estar en volúmenes finitos con especificación de condiciones de contorno en dicho volumen. Por ejemplo cuando se trabaja dentro de una caja de Faraday donde las condiciones de contorno quedan especificadas a través de un potencial constante (o cero por convención) en la caja.

Para trabajar con condiciones de contorno necesitamos pensar en dos aspectos:

1. ¿Qué condiciones de contorno se deben exigir tal que la solución del problema sea única? Si uno especifica menos condiciones de contorno de las requeridas las soluciones serían infinitas si se sobre-especifican puede no haber ninguna solución.
2. Desarrollar un método de resolución para problemas que contengan los efectos de las condiciones de contorno.

2.6.1 Unicidad de la solución

Por el momento proponemos el tipo de condiciones de contorno que resultan razonables y luego demostraremos que efectivamente éstas son las condiciones de contorno que imponen una solución única al problema electrostático.

Si estamos resolviendo un problema en Φ que satisface la ecuación de Poisson, (2.19), lo que proponemos es:

- Condición de Dirichlet: conocemos al potencial Φ en la superficie cerrada que encierra el dominio.
- Condición de Neumann: Se especifica la derivada normal del potencial eléctrico en la superficie, este es el campo eléctrico en la superficie. Esto podría ser interpretado como dar una densidad de carga superficial tal que genere la derivada normal del potencial eléctrico.

Demostremos la unicidad del problema con condiciones de Dirichlet reduciendo el argumento contrario al absurdo, es decir propongamos que existen dos soluciones para terminar demostrando que la única posibilidad es que estas sean exactamente iguales.

Sean Φ_1 y Φ_2 dos soluciones a la ecuación de Poisson, (2.19), con condiciones de contorno de Dirichlet, e.g. $\Phi_1 = V_1(\vec{x})$ en S . Consecuentemente definimos una función que es la diferencia de las dos soluciones $\Psi = \Phi_2 - \Phi_1$ luego la ecuación diferencial que satisface Ψ en el interior de V es:

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{2.59}$$

cuya condición de contorno en S , debe ser $\Psi = 0$. Desde luego estamos ante un problema donde no existen fuentes en el interior y por otro lado la condición de contorno es la

trivial, luego se trata de demostrar que en este caso la función Ψ debe ser idénticamente nula en todo el interior y por lo tanto no pueden existir dos soluciones distintas.

De la primera identidad de Green eligiendo ambas variables, ψ y ϕ como Ψ se tiene

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S \Psi \partial_n \Psi ds \quad (2.60)$$

dadas las condiciones de contorno de Dirichlet $\Psi = 0$ en S . Por otro lado también sabemos que $\nabla^2 \Psi = 0$ luego resulta que

$$\int_V |\nabla \Psi|^2 dV = 0 \quad (2.61)$$

pero entonces el único Ψ que puede satisfacer esta integral es que $\nabla \Psi = 0$ luego se tiene que Ψ es una constante adentro de V pero dado que las condiciones de contorno son que $\Psi = 0$ esa constante tiene que ser el 0. Finalmente hemos determinado que:

$$\Phi_1 = \Phi_2. \quad (2.62)$$

La solución del problema con condiciones de Dirichlet es por lo tanto única.

Este resultado nos indica que si hubiéramos pedido condiciones de Cauchy, es decir, exigiendo valores de Φ y $\partial_n \Phi$ arbitrarios en S no existe solución. Si tenemos un dado Φ y elegimos un valor arbitrario de $\partial_n \Phi$ que no corresponde al Φ especificado entonces no existirá una solución para tal problema (ya que con solo elegir una de las dos condiciones el problema ya tiene solución única).

2.6.2 Solución general del problema. Función de Green

El problema que queremos resolver es encontrar el potencial eléctrico Φ que satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = -\rho(\vec{x})/\epsilon_0 \quad (2.63)$$

sujeto a condiciones de Dirichlet o Neumann en el contorno del dominio.

En el caso de resolución del problema sin condiciones de contorno, léase con condiciones de contorno en el infinito, el método que utilizamos para encontrar la solución fue primero encontrar la solución del problema de una carga puntual. Luego para el problema de una distribución de cargas, utilizamos una superposición lineal, es decir la solución del problema consistió en sumar las soluciones de cada una de las carguitas puntuales que componen la distribución de carga y de esta forma encontramos la solución general del problema sin condiciones de contorno para una distribución de cargas arbitraria. ¿Podemos extender este método de resolución al caso con condiciones de contorno?

Para esto deberíamos resolver el problema de una carga puntual q ubicada en una posición arbitraria $\vec{x}_0$, es decir $\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$,

$$\nabla^2 \Phi_p = -q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)/\epsilon_0 \quad (2.64)$$

dado que luego vamos a usar el principio de superposición, nos conviene tomar como condición de contorno de potencial 0.

Por comparación con el caso sin condiciones de contorno, Sección (2.5.3), podemos ver que la carga que debería tomarse es de $q = 4\pi\epsilon_0$.

Si ahora tenemos una distribución de carga arbitraria y suponemos que conocemos la solución para el problema de una carga puntual, lo que hacemos es utilizar la segunda identidad de Green, con Φ y Φ_p ,

$$(2.65)$$

Interpretación de la función de Green La expresión de la solución general esta sujeta a determinar la función de Green la cual es la solución de un problema de Poisson para una carga puntual de carga $q = -4\pi\epsilon_0$ con condiciones de contorno triviales $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ sin embargo estas son para $\vec{x}'$ en S . Es decir hemos convertido el problema de densidad de carga con condiciones de contorno de Dirichlet en S en un problema de una carga puntual con condiciones de contorno de Dirichlet triviales. (Aun cuando el problema es mas simple que el original no siempre este puede ser resuelto, en particular si las condiciones de contorno involucran geometrías complicadas).

Para condiciones de contorno de Neumann se debe notar que no podemos tomar $\partial'_n G_N(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ ya que si integramos en un volumen la ecuación diferencial para la función de Green (??) resulta

$$\int_V \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') dV' = -4\pi \int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (2.66)$$

Usando el Teorema de la divergencia resulta que

$$\oint_S \partial'_n G ds' = -4\pi \quad (2.67)$$

es decir no podríamos tomar la condición trivial, pero si podemos tomar que la derivada normal sea una constante en la superficie, $\partial'_n G_N = -\frac{4\pi}{S}$ para $\vec{x}'$ en S . La solución para condiciones de contorno de Neumann resultante es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}, \vec{x}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \partial'_n \Phi G_N ds' + S^{-1} \oint_S \Phi(\vec{x}') ds' \quad (2.68)$$

donde el último término es una constante.

2.7 Energía potencial electrostática

Veremos dos formas para encontrar la energía, primero partiremos de las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo y derivaremos la ecuación de conservación de la energía general, luego derivaremos el caso electrostático a partir del método constructivo, cuanto trabajo debemos invertir para generar una dada distribución de carga.

En general la conservación de la energía debe ser derivada de las ecuaciones que gobiernan el proceso físico. Es decir que trabajando con las ecuaciones de Maxwell debemos ser capaces de encontrar la forma de la energía.

Usando las ecuaciones de evolución de los campos:

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.69)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (2.70)$$

Como queremos tener la evolución de la magnitud de los campos al cuadrado multiplicamos via producto interior a (2.69) por $\vec{E}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{1}{2} \partial_t |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (2.71)$$

y a (2.70) por $\vec{B}/\mu_0$

$$\mu_0^{-1} \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} + \mu_0^{-1} \frac{1}{2} \partial_t |\vec{B}|^2 = 0 \quad (2.72)$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \partial_t |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} \partial_t |\vec{B}|^2 \right) = -\vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}) \quad (2.73)$$

Del cual resulta que

$$\partial_t \left[\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) \right] + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{J} \quad (2.74)$$

Esta es la forma de una ecuación de conservación, por un lado tenemos el término del cambio temporal de la densidad de energía, luego esta el término del flujo de energía, cuanta energía ingresa o se va del punto en consideración y finalmente tenemos las fuentes.

Denotamos entonces a:

- densidad de energía electromagnética: $w = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right)$,
- flujo de energía: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, vector de Poynting.
- $-\vec{E} \cdot \vec{J}$ fuente de energía electromagnética.

En el caso de campos electrostáticos la energía es constante: $\partial_t W = 0$

La densidad de energía electrostática viene dada por

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (2.75)$$

la cual es constante temporalmente. La energía electrostática de un sistema será dada por

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\vec{E}|^2 dV \quad (2.76)$$

2.7.1 Energía requerida para formar una distribución de carga

En electrostática el campo eléctrico es conservativo por lo que la energía electrostática de un sistema debería ser igual al trabajo requerido para armar el sistema. Calculemos entonces el trabajo necesario para transportar una carga de prueba en un campo eléctrico externo desde un punto A hasta B .

Por definición el trabajo viene dado por

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (2.77)$$

El signo es debido a que estamos considerando el trabajo hecho sobre la carga en contra de la acción del campo eléctrico. Si tenemos una carga de prueba q en un campo eléctrico $\vec{E}$ externo, la fuerza es $\vec{F} = q\vec{E} = -q\nabla\phi$, por lo tanto se tiene

$$W = -q \int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{l} = q \int_A^B d\phi = q(\phi_B - \phi_A) \quad (2.78)$$

Notar que el trabajo realizado solo depende de los puntos finales pero no del camino realizado, una propiedad característica de las fuerzas conservativas. La independencia del camino se debe a que si hacemos un camino cerrado tenemos que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.79)$$

entonces la independencia del camino se debe a que el campo eléctrico es irrotacional, $\nabla \times \vec{E} = 0$.

Si traemos a una carga desde el infinito donde asumimos que el potencial eléctrico es 0 hasta el punto $\vec{x}$, el trabajo realizado se puede expresar por

$$W = q\phi(\vec{x}) \quad (2.80)$$

La energía potencial de la carga de prueba en el campo es entonces dada por (2.80).

2.7.2 Energía potencial de N cargas en el vacío

Si queremos determinar cual es la energía potencial de un sistema de N cargas q_i ubicadas en $\vec{x}_i$, lo que haremos es comenzar a armar al sistema trayendo las cargas desde el infinito y calculando el trabajo que necesitamos realizar para colocarla en su posición final. La primera carga no requiere de trabajo ya que no existe campo eléctrico,. Al traer la segunda carga tenemos el campo que produce la primera por lo que existirá una fuerza y el trabajo requerido es dado por (2.80):

$$W_2 = q_2\phi_1(\vec{x}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (2.81)$$

donde hemos asumido que las cargas están fijas y no existe interacción al traer las cargas. Cuando traigamos la carga q_3 el trabajo que tenemos que realizar es

$$W_3 = q_3\Phi_1(\vec{x}_3) + q_3\Phi_2(\vec{x}_3) \quad (2.82)$$

Entonces generalizando el trabajo que tenemos que realizar para traer a la carga q_i es:

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j(\vec{x}_i) \quad (2.83)$$

El potencial generado por las $i - 1$ cargas en $\vec{x}_i$ viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \quad (2.84)$$

Por lo que el trabajo para traer a la carga q_i es

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \quad (2.85)$$

Sumando entonces para las N cargas

$$W = \sum_{i=2}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \quad (2.86)$$

Dado que las contribuciones son simétricas podríamos sumar directamente a todas excepto las mismas cargas y luego se multiplica por un medio,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}. \quad (2.87)$$

Si tenemos una distribución de cargas continua, usamos (2.87) con $q_i \rightarrow \rho(\vec{x})dV$ y las sumas son reemplazadas por integrales quedando,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV dV'. \quad (2.88)$$

La integral en V' puede ser interpretada como el potencial generado por ρ ,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})dV \quad (2.89)$$

Si queremos expresar en función del campo eléctrico a la energía potencial usamos la ecuación de Poisson,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla^2 \Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})dV \quad (2.90)$$

Para obtener las dependencias con el campo eléctrico, lo que debemos usar es el equivalente a la integración por partes pero en varias dimensiones, la cual viene dada por:

$$\int \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dV = \int \Phi \nabla^2 \Phi dV + \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi dV \quad (2.91)$$

de aquí se deduce usando teorema de Gauss que

$$\int \Phi \nabla^2 \Phi dV = \int \Phi \nabla \Phi \cdot d\vec{s} - \int |\nabla \Phi|^2 dV \quad (2.92)$$

es decir que lo que en una dimensión corresponde a evaluación en los extremos aquí corresponde a una integral de superficie. Esta integral de superficie es igual a 0 para $r \rightarrow \infty$, dado que en el límite $\Phi \rightarrow r^{-1}$, $|\nabla \Phi| \rightarrow r^{-2}$ y el $|d\vec{s}| \rightarrow r^{-2}$. La energía electrostática (2.88) puede ser entonces expresada como

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\nabla \Phi \cdot \Phi|_V - \int_V |\nabla \Phi|^2 dV \right) \quad (2.93)$$

Como sabemos que Φ decae como r^{-1} y es 0 en el infinito, se tiene que $\nabla \Phi \cdot \Phi|_V = 0$, luego

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV \quad (2.94)$$

Esta es la expresión de energía es equivalente a la que encontramos para el caso electrostático en el desarrollo general para campos variables en el tiempo.

Ejercicio 2.3: Si tenemos una distribución de carga superficial σ en un conductor plano cual es el campo eléctrico sobre cada lado de la superficie. Determine la densidad de energía potencial electrostática del sistema. Compare con la energía de una distribución superficial de carga σ .

Utilicemos el teorema de Gauss para determinar como es el campo en las cercanías de la superficie cargada, pongamos un cilindrito bien pegado a la superficie, dado que solo contribuyen las dos superficies del cilindro, una dentro del conductor y la otra pegada por fuera de este, se tiene:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} \int ds = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \int ds \quad (2.95)$$

luego se tiene

$$\Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.96)$$

es decir la componente normal del campo eléctrico tiene una discontinuidad en la superficie que posee la densidad de carga superficial, como $\vec{E}_1 = 0$ entonces,

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.97)$$

La componente tangencial del campo eléctrico es:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.98)$$

$$(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.99)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.100)$$

$$(2.101)$$

Por lo tanto, la componente tangencial es continua e igual a 0.

Finalmente veamos como es la densidad de energía de este sistema,

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (2.102)$$

En el caso de una distribución superficial de carga, el campo eléctrico estará en ambos lados de la superficie por lo que es la mitad $E_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, mientras la energía es un cuarto del caso del plano conductor, i.e. $w = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_0}$.

Ejercicio 2.4: Determinar la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas. Apliquemos la ley de Gauss asumiendo no hay cargas afuera del conductor,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.103)$$

$$(\vec{E}_{int} - 0) \cdot \hat{n} S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.104)$$

Luego el campo en el interior:

$$\vec{E}_{int} \cdot \hat{n} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \quad (2.105)$$

Entonces la energía por unidad de volumen almacenada es

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2} \quad (2.106)$$

La diferencia de potencial es:

$$\Delta\Phi = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_{int}d \quad (2.107)$$

La capacidad es

$$C = \frac{q}{\Delta\Phi} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2.108)$$

Capítulo 3

Función de Green en distintas geometrías

De lo visto en el capítulo anterior, podemos concluir que la resolución de un problema electrostático general con condiciones de frontera, se concentra en la determinación de la función de Green para el problema, la cual se debe notar que solo depende de la geometría del problema es decir de la superficie del contorno y, dada su definición, es independiente de la distribución de cargas en el volumen y de la especificación exacta de la condición de contorno. Si queremos determinar la función de Green se debe resolver la siguiente ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.1)$$

con $G_D = 0$ en S para el problema de Dirichlet.

Método de las imágenes Una de las metodologías que se utiliza para encontrar la función de Green es a través del denominado método de las imágenes. El método consiste en poner una carga puntual en el dominio y poner cargas “imágenes” fuera del dominio en cuestión (fuera de S), se pondrán cargas con magnitudes y en las posiciones necesarias para que el problema cumpla con las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann en S . Es decir que la posición y magnitud de las cargas imágenes se determinarán de la exigencia que el potencial sea 0 en S para el caso de Dirichleto que la derivada normal del potencial sea una constante para el caso de Neuman. Notar que las cargas imágenes estan fuera del dominio y por lo tanto *no* contribuyen a la ecuación de Poisson adentro del dominio la cual solo tendrá la carga puntual. La única función de las cargas externas es la de genera las condiciones de contorno adecuadas.

3.1 Función de Green para el semiespacio $x > 0$

Se plantea como problema encontrar el potencial eléctrico de una carga puntual q que se encuentra situada a una distancia d de un plano conductor con $\Phi = 0$ ubicado en $x = 0$. Este problema lo vamos a plantear a través del método de las imágenes por lo

que proponemos a la carga fuente y ademas proponemos una carga imagen q' ubicada en una posicion d' que estaria fuera del dominio de interes, es decir ubicada en $x < 0$. El potencial general viene entonces dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[(x-d')^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.2)$$

donde hemos asumido por razones de simetría que la carga imagen se encuentra ubicada en la misma línea que une la carga fuente con la normal al plano. Dada la analogía con el problema de óptica resulta evidente que la carga imagen debería ser $q' = -q$ y estar ubicada en $d' = -d$, sin embargo a los fines de concentrarnos en el procedimiento veamos como se determinarían la carga imagen y su posición. Es decir tenemos dos incognitas, y sabemos que se debe cumplir que $\Phi(x=0) = 0$, de aqui podemos tomar dos casos particulares para tener un sistema de dos ecuaciones, $y = z = 0$ y $y = y_0$ y $z = 0$. Para el primer caso se tiene que

$$\Phi(x=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d} - \frac{q'}{d'} \right) = 0 \quad (3.3)$$

donde se asume que $d' < 0$. Por lo que la carga imagen viene dada por

$$q' = q \frac{d'}{d} \quad (3.4)$$

De la segunda ecuación se obtiene que

$$\Phi(x=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(d^2 + y_0^2)^{1/2}} + \frac{qd'}{d(d'^2 + y_0^2)^{1/2}} \right) = 0 \quad (3.5)$$

de donde se deduce que

$$d^2(d'^2 + y_0^2) - d'^2(d^2 + y_0^2) = 0 \quad (3.6)$$

es decir que la posicion de la carga imagen es $d'^2 = d^2$, de aqui descartamos la solución $d' = d$ ya que estaria dentro del dominio en consideración y de hecho esta solucion nos daria un potencial nulo en todas partes, por lo que la posición de la carga imagen debe ser $d' = -d$ y reemplazando en (3.4) se obtiene que $q' = -q$. El potencial entonces es dado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.7)$$

esta ecuación cumple con ambas premisas del problema, tiene una carga puntual ubicada a una distancia d del plano y además en todo el plano $x = 0$ el potencial se hace 0.

Este potencial eléctrico (3.7) es en general el potencial de una carga puntual en un problema cuyas condiciones de contorno en el plano $x = 0$ y en infinito son $\Phi = 0$. Por lo que sabemos que el potencial (3.7) satisface:

$$\nabla^2 \Phi_p = q/\epsilon_0 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.8)$$

donde $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ son vectores localizados en el semiespacio $x > 0$, y además se nota que por construcción (3.7) satisface con la condición de contorno $\Phi = 0$ en $x = 0$.

Ejercicio 3.1: a) Determinar la densidad de carga superficial de (3.7) sobre la superficie contorno $x = 0$ para un plano conductor con una carga puntual q . b) Integrar la densidad de carga superficial obtenida en a) para obtener la carga total inducida en el plano. Explique el resultado en terminos de superficies Gaussianas. c) Determinar la fuerza con la que la carga es atraída hacia el plano. d) Calcular la energía potencial electrostática.

Es decir que si fijamos el valor de la carga a $q = 4\pi\epsilon_0$, el potencial (3.7) es la función de Green de Dirichlet para el semiespacio $x > 0$,

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \quad (3.9)$$

A través de esta función de Green podemos expresar la solución del problema general electrostático para el semiespacio $x > 0$,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') G(\vec{x} - \vec{x}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{x}') \partial_n G(\vec{x}, \vec{x}') \quad (3.10)$$

Ejercicio 3.2: Determinar $\partial_n G(\vec{x}, \vec{x}')$ en el problema del plano conductor.

Ejercicio 3.3: Determinar el potencial en el caso que tenemos dos planos formando un ángulo $\alpha = \pi/2$ y existe una carga puntual q ubicada en una posición arbitraria. Escriba la función de Green del problema.

Ejercicio 3.4: ¿Como cambia la función de Green, (3.9), en el caso en que queramos resolver un problema en el semiespacio $x < 0$?

3.2 Función de Green para la esfera. Método de las imágenes

En el caso que tengamos una carga puntual frente a una esfera conductora conectada a tierra, $\Phi = 0$. El problema entonces podría ser planteado por el método de las imágenes: ponemos una carga imagen dentro de la esfera, y dada la simetría del problema debería estar en la misma dirección que la carga.

El potencial que debemos resolver es:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \frac{x'_0}{x_0} \vec{x}_0|} \right). \quad (3.11)$$

Luego lo que debemos determinar es la carga imagen q' y la posición x'_0 .

La distancia entre dos vectores puede ser expresada en la forma:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}_0| &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_0 + \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0} \\ &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x} - 2|\vec{x}||\vec{x}_0| \cos \gamma + \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \gamma + r_0^2} \end{aligned}$$

donde γ es el ángulo entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{x}_0$ y r, r_0 son sus respectivos módulos.

Solo necesito dos ecuaciones ya que son dos las incógnitas, tomo por simplicidad sobre la esfera de radio a las direcciones: $\cos \gamma = \pm 1$.

Las dos ecuaciones resultantes son:

$$\Phi(\vec{x} = \vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_0 - a} + \frac{q'}{a - r'_0} \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$\Phi(\vec{x} = -\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_0 + a} + \frac{q'}{a + r'_0} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Resolviendo el sistema (3.12)-(3.13) se obtiene $r'_0 = \frac{a^2}{r_0}$ y $q' = -\frac{a}{r_0}q$.

Mientras mas cerca esta la carga de la esfera mas cerca también estará la carga imagen. Si la carga esta muy lejos de la esfera la carga imagen será muy pequeña.

El potencial de una carga puntual que se encuentra dentro de una esfera conductora conectada a tierra tal que el potencial en la esfera es $\Phi = 0$ es

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{a}{r_0 |\vec{x} - \frac{a^2}{r_0^2} \vec{x}_0|} \right). \quad (3.14)$$

Ejercicio 3.5: Calcular la densidad superficial de carga sobre la esfera conductora utilizando que $\sigma = \epsilon \partial_n \Phi$. Determinar la fuerza con la que la carga es atraída por la esfera conductora.

La fuerza con que la carga es atraída por la esfera conductora puede ser calculada directamente teniendo en cuenta la fuerza que se ejercen las cargas fuente e imagen. Dado que el efecto sobre la esfera conductora es de inducción habrá una atracción razón por la cual las cargas son de distinto signo. La distancia entre las cargas es:

$$r_0 - r'_0 = r_0 - \frac{a^2}{r_0} = r_0 \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \right) \quad (3.15)$$

La fuerza es entonces:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(r_0 - r'_0)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq^2}{r_0^3 (1 - a^2/r_0^2)^2} \quad (3.16)$$

Entonces para alejar a una carga de un metal tenemos que hacer un trabajo que se debe a la inducción de cargas de signo contrario en el metal, en el método de las imágenes esto se debe directamente a la atracción entre la carga fuente y la carga imagen.

Ejercicio 3.6: Determinar el potencial en el caso en que tenemos una esfera conductora con carga Q . En este caso la solución será una superposición del problema que ya resolvimos al problema de una carga puntual $Q - q'$ en el origen.

Ejercicio 3.7: Esfera conductora a un potencial V . Calcular cual es la carga que genera ese potencial, $Q - q' = Va$, y luego resolver como el ejercicio anterior.

Ejercicio 3.8: Esfera conductora en un campo eléctrico uniforme. Pensar en cargas externas opuestas entre sí.

Si tenemos en cuenta la solución que se encontró para una carga puntual frente a una esfera conductora con potencial $\Phi = 0$, (3.14), reemplazando el valor de la carga por $q = 4\pi\epsilon_0$ tenemos la función de Green para el problema de Dirichlet de la esfera (notar que pedimos que el potencial sea nulo en el contorno), además cambiamos de notación r_0 por r' ,

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a/r'}{|\vec{x} - (a/r')^2 \vec{x}'|} \right). \quad (3.17)$$

Esta es la función de Green para el problema interno de la esfera.

Teniendo en cuenta que el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ es γ , usando (3.12) en (3.17) tenemos

$$G_D = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-1/2} - \left(\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos \gamma \right)^{-1/2}. \quad (3.18)$$

La solución general del problema con condiciones de contorno de Dirichlet

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} G_D(\vec{x} - \vec{x}') dV' - \int_S [\Phi \partial_n' G_D(\vec{x} - \vec{x}')] ds' \right\}. \quad (3.19)$$

Por lo que además de la función de Green (3.18) necesito determinar la derivada normal en la superficie esférica de la función de Green. Derivando a (3.18) con respecto a la normal, es decir con respecto a $-r'$, ya que es hacia el interior de la esfera, la derivada normal resultante es

$$\partial_{n'} G_D|_{r'=a} = - \frac{(r^2 - a^2)}{a(r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma)^{3/2}} \quad (3.20)$$

esta representa la densidad superficial de carga inducida en el conductor debido a la presencia de la carga $q = 4\pi\epsilon_0$.

Ejercicio 3.9: ¿Como cambia la función de Green, (3.17), en el caso en que se quiera resolver un problema exterior?

Para el caso en que tenemos la superficie esférica con un potencial $\Phi(a, \theta, \phi) = V(\theta, \phi)$ y queremos resolver el problema externo sabiendo que no hay cargas, $\rho = 0$, y que $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ usamos (3.19),

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \phi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'. \quad (3.21)$$

Ejercicio 3.10: Demostrar que $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$. Esta transformación reviste de importancia ya que las coordenadas de la expresión de la derecha corresponden a los ángulos de las coordenadas esféricas.

Pensemos en dos vectores unitarios $|\vec{x}| = |\vec{x}'| = 1$.

Si usamos el teorema del coseno

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos \gamma = 2(1 - \cos \gamma) \quad (3.22)$$

Pensando en las coordenadas de los dos vectores:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 2(1 - \cos \gamma) \quad (3.23)$$

Transformando a coordenadas esféricas las coordenadas x, y, z y x', y', z' ,

$$(\cos \phi \sin \theta - \cos \phi' \sin \theta')^2 + (\sin \phi \sin \theta - \sin \phi' \sin \theta')^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2 = 2(1 - \cos \gamma). \quad (3.24)$$

Expandiendo los cuadrados y haciendo un poquito de álgebra resulta

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\phi' - \phi). \quad (3.25)$$

Ejercicio 3.11: Un problema de aplicación de (3.21) es una esfera conductora que tiene un aislante en el Ecuador, y de esta manera se divide en dos hemisferios uno el superior de potencial $+V$ y otro el inferior de potencial $-V$.

Reemplazando $\Phi(a, \theta', \phi')$ en la ecuación (3.21)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left[\int_0^1 d(\cos \theta') - \int_{-1}^0 d(\cos \theta') \right] \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} \quad (3.26)$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$.

3.3 Separación de variables

La ecuación de Laplace puede ser resuelta proponiendo una solución que es un producto de funciones de sus variables independientes, es decir asumiendo que la solución es separable en sus variables independientes. Dado que la solución es única si existe tal solución la solución es por lo tanto separable. Existen en total 11 tipos de coordenadas para los cuales se conoce la solución de la ecuación de Laplace. En este curso solo veremos 3 de estas coordenadas: rectangulares, esféricas y cilíndricas.

Dado que el conjunto de soluciones es un conjunto ortogonal y *completo*, entonces estas soluciones pueden ser utilizadas para todos los casos cuya geometría este ligada al tipo de coordenadas que se utiliza.

3.3.1 Ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares es

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.27)$$

Proponemos que la solución puede escribirse como el producto de tres funciones; cada una de estas funciones es solo función de una de las variables independientes del problema x, y, z :

$$\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (3.28)$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (3.29)$$

nótese que la derivadas son derivadas totales. Entonces la ecuación (3.29) ha quedado expresada en tres términos los cuales cada uno depende de una variable distinta, esta es la cualidad interesante que tiene la ecuación de Laplace (como toda ecuación lineal) por lo que para que esta expresión sea válida cada uno de los términos debería ser una constante ya que si dependieran de cada una de las variables no habría forma de satisfacer la ecuación.

Supongamos que la caja a resolver tiene condiciones de contorno periódicas en x e y y no periódicas en z . Esto permite que la ecuación pueda ser expresada como tres ecuaciones diferenciales ordinarias en variables diferentes es decir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (3.32)$$

donde el signo de la constantes se ha tomado de acuerdo a la condición de contorno. Si la condición es periódica se toma negativo, si la condición es no periódica se toma la constante positiva. Si se reemplaza en la ecuación de Laplace, estas tres ecuaciones diferenciales ordinarias, (3.30)-(3.32), se tiene que las constantes deben satisfacer

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2. \quad (3.33)$$

Las soluciones para cada ecuación diferencial ordinaria son

$$X = \exp \pm i\alpha x \quad Y = \exp \pm i\beta y \quad Z = \exp \pm \gamma z \quad (3.34)$$

Para determinar las constantes α y β , además del conjunto de soluciones necesitamos imponer las condiciones de contorno.

Supongamos una caja con una arista ubicada en el origen y el resto de las aristas se encuentra en el subespacio positivo, cuyos lados en x, y y z son a, b y c respectivamente. La caja tiene potencial $\Phi = 0$ excepto la cara superior $z = c$ la cual tiene un potencial de $\Phi = V(x, y)$.

De la condición $\Phi(x = 0) = 0$ se tiene que $X = \sin(\alpha x)$

De la condición $\Phi(y = 0) = 0$ se tiene que $Y = \sin(\beta y)$

De la condición $\Phi(z = 0) = 0$ se tiene que $Z = \sinh(\gamma z)$

Como $\Phi = 0$ en $x = a$ $X = \sin(\alpha a) = 0$ luego la condición es que $\alpha a = n\pi$ es decir que α esta cuantizado de la forma:

$$\alpha = \frac{n\pi}{a} \quad (3.35)$$

De la condición de contorno en $y = b$ se tiene

$$\beta = \frac{m\pi}{b} \quad (3.36)$$

Entonces las funciones en las variables x e y quedan cuantizadas, debido a que hemos exigido condiciones periódicas en un dominio acotado, de tal manera que n y m determinarán el número de raíces en las direcciones x y y respectivamente.

Luego γ queda determinado por

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \quad (3.37)$$

Estos conjuntos de funciones ortogonales son completos en la caja sujeto a todas las funciones que cumplen con las condiciones de contorno.

La solución general será suma de todos los modos posibles

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) \quad (3.38)$$

con la condición de contorno que falta en $z = c$:

$$\Phi(x, y, z = c) = V(x, y) \quad (3.39)$$

Dado que las funciones son una base para cualquier $V(x, y)$, se determina las constantes, A_{nm} ,

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sin(\gamma_{nm} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) dx dy \quad (3.40)$$

esto se obtiene evaluando a (3.38) en $z = c$, multiplicando a ambos lados por $\sin(\alpha_n' x) \sin(\beta_m' y)$ e integrando x y y y usando ortogonalidad de las funciones.

3.3.2 Ecuación de Laplace en coordenadas polares

Si tenemos un problema electrostático sin fuentes $\rho = 0$ que tenga geometría cilíndrica y que tenga simetría en el eje z o que de coordenadas polares, e.g. discos concéntricos, planos formando un ángulo, etc. Con esto nos estamos refiriendo a que *las condiciones de contorno del problema* estan expresadas en coordenadas cilíndricas, además si decimos que tiene simetría en una de las variables, lo que estamos diciendo es que las condiciones de contorno son independientes de esa variable, y por lo tanto la solución del problema, el

potencial, será independiente de esa variable. Entonces por ejemplo nos estamos refiriendo a un problema de condiciones de contorno en un cilindro $\Phi(\rho = a, \phi, z) = V(\phi)$ y se quiere encontrar el potencial en el interior del cilindro.

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\phi\phi}^2 \Phi + \partial_{zz}^2 \Phi = 0 \quad (3.41)$$

Dado que las condiciones de contorno del problema son independientes de la variable z , la solución también lo es, por lo que únicamente debemos resolver el problema en el plano:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{\phi^2}^2 \Phi = 0 \quad (3.42)$$

Asumiendo la solución es separable en las variables ρ y ϕ , luego,

$$\Phi = R(\rho) \Psi(\phi) \quad (3.43)$$

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación diferencial (3.42), en forma equivalente al caso de coordenadas rectangulares, para satisfacer la ecuación diferencial resultante cada uno de los términos de la ecuación deben ser constantes:

$$\frac{\rho}{R} \partial_\rho(\rho \partial_\rho R) = \nu^2 \quad (3.44)$$

y

$$\partial_{\phi^2}^2 \Psi = -\nu^2 \quad (3.45)$$

Resolviendo la ecuación para ρ , (3.44),

$$\partial_\rho(\rho \partial_\rho R) = \nu^2 \frac{R}{\rho} \quad (3.46)$$

las posibles soluciones son $R = \rho^{\pm\nu}$ donde aun no se ha demostrado la cuantización es decir ν es un número real.

En el caso en que $\nu = 0$ se tiene que

$$\partial_\rho(\rho \partial_\rho R) = 0 \quad (3.47)$$

cuya solución es

$$R = C \ln(\rho/\rho_0). \quad (3.48)$$

En el caso de la variable angular se tiene que

$$\Psi(\phi) = A \cos(\nu\phi) + B \sin(\nu\phi) \quad (3.49)$$

en el caso de $\nu = 0$ es

$$\Psi = E + F\phi \quad (3.50)$$

como las funciones deben ser univaluadas se debe pedir que:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad (3.51)$$

es decir que la función Φ debe satisfacer condiciones de contorno periódicas, esto muestra que ν debe ser entero y lo llamaremos n , además se debe pedir por la periodicidad que $F = 0$.

La solución general de la ecuación de Laplace para un problema en coordenadas polares, i.e. coordenadas cilíndricas con independencia de la variable z , es

$$\Phi(x, y, z) = a_0 \ln(\rho/\rho_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \{[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)]\rho^n + [c_n \cos(n\phi) + d_n \sin(n\phi)]\rho^{-n}\}. \quad (3.52)$$

Ejercicio 3.12: Se tienen dos discos concéntricos de radios $\rho = a$ y $\rho = b$ con potenciales $\Phi(\rho = a) = V_1$ y $\Phi(\rho = b) = V_2$. Determinar el potencial en el interior entre los discos.

Rta. La solución viene dada por (3.52). Dado que el problema es independiente de ϕ , se deduce que de la solución se tiene a_n , b_n , c_n y d_n son 0, luego solo permanece el primer término en (3.52). Las dos constantes se deben determinar de la condición de contorno, por comodidad reescribimos las constantes de tal manera que la solución sea $\Phi = A + B \ln \rho$, luego

$$A + B \ln a = V_1 \quad (3.53)$$

y

$$A + B \ln b = V_2 \quad (3.54)$$

la solución debe ser

$$\Phi = (\ln(a/b))^{-1} [V_1 \ln(\rho/b) - V_2 \ln(\rho/a)]. \quad (3.55)$$

3.4 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Simetría azimutal

Supongamos un problema donde se quiere determinar el potencial en un dominio que esta libre de cargas ($\rho = 0$) con condiciones de contorno en una esfera de radio $r = a$ donde el potencial es $V(\theta)$. En este caso lo mas conveniente es utilizar la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y determinar el conjunto de funciones ortonormales que satisfacen esta ecuación de Laplace con simetría azimutal, i.e. el problema y en particular su solución es independiente de ϕ .

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r} \partial_{rr}^2(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_{\theta}(\sin \theta \partial_{\theta} \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 \Phi = 0. \quad (3.56)$$

Para resolver esta ecuación utilizamos el método de separación de variables. Como el problema tiene simetría azimutal proponemos una solución que sea independiente de ϕ ,

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) \quad (3.57)$$

si sustituimos esta solución en la ecuación (3.56) se debe cumplir que

$$\frac{P}{r} \partial_{rr}^2 U + \frac{U}{r^3 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta P) = 0 \quad (3.58)$$

Dividiendo a (3.58) por la función (3.57) se tiene que

$$\frac{r^2}{U} \partial_{rr}^2 U + \frac{1}{\sin \theta P} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta P) = 0 \quad (3.59)$$

Dado que los dos sumandos son funciones de variables distintas estos deberían ser constantes por lo tanto la función en r queda

$$\frac{r^2}{U} \partial_{rr}^2 U = l(l+1) \quad (3.60)$$

La solución que satisface esta ecuación diferencial ordinaria es $U = Ar^{l+1} + Br^{-l}$. Nótese que por el momento l puede ser cualquier número real luego veremos que dadas las condiciones de contorno que debe satisfacer la función en θ , l debe ser un número natural. Veamos la forma de la solución en la parte angular, en función de θ ,

$$\frac{1}{\sin \theta P} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta P) = -l(l+1) \quad (3.61)$$

Realizando un cambio de variable y llamando $x = \cos \theta$ se tiene

$$\partial_\theta P = \partial_{\cos \theta} P \partial_\theta \cos \theta \quad (3.62)$$

$$= -\sin \theta \partial_{\cos \theta} P \quad (3.63)$$

$$= -(1-x^2)^{1/2} \partial_x P \quad (3.64)$$

la ecuación diferencial que resulta es entonces:

$$\partial_x [(1-x^2) \partial_x P] + l(l+1)P = 0 \quad (3.65)$$

esta es una ecuación clásica del problema de Sturm-Liouville que puede encontrarse en los libros de física matemática o la tabla Schawn, la solución a esta ecuación son los polinomios de Legendre $P_l(x)$. Este es un conjunto completo de funciones en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Los polinomios de Legendre son además ortogonales entre sí. La condición de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^1 P_l'(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (3.66)$$

Notar entonces que los polinomios de Legendre no están normalizados. La condición de “normalización” que satisfacen son: $P_l(1) = 1$ es decir que en el extremo superior los polinomios valen 1.

Las características y propiedades de estos polinomios pueden verse en algún libro de física matemática, e.g. Morse and Feshbach, aquí no haremos hincapié en las propiedades, salvo alguna que otra excepción, como la fórmula generatriz que veremos a continuación.

Para obtener a los polinomios proponemos que la solución a la ecuación diferencial (3.65) es una serie de potencias de la forma:

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (3.67)$$

reemplazando en la ecuación (3.65) se obtiene la relación de recurrencia para los a_j

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l + 1)}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)} a_j \quad (3.68)$$

para que la serie termine y así tener una solución finita, i.e. acotada como es esperable físicamente, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ se necesita que l sea un entero positivo.

A partir de estos polinomios teniendo en cuenta que es un conjunto completo en $-1 \leq x \leq 1$, cualquier función dentro de este intervalo puede ser escrita como

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad (3.69)$$

La solución general para el problema de simetría azimutal es, $\Phi = \frac{U}{r} P$,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.70)$$

Luego la metodología para un problema de condiciones de contorno con simetría azimutal es proponer la solución general para este tipo de problemas (3.70) para luego determinar los coeficientes A_l y B_l tal que se satisfagan las condiciones de contorno.

Supongamos un problema interno a una esfera de radio a cuyo potencial es $V(\theta)$, en este caso $B_l = 0$ ya que el potencial debe ser finito en el dominio en cuestión debido a que no hay cargas, luego los A_l se determinan imponiendo la condición de contorno es decir:

$$\Phi(r = a) = V(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) \quad (3.71)$$

debemos por lo tanto expresar a la condición de contorno $V(\theta)$ como una superposición de polinomios de Legendre y de esta manera podemos determinar los coeficientes A_l . Multiplicando entonces por $P_l(\cos \theta)$ y usando la condición de ortogonalidad se tiene:

$$A_l = \frac{(2l + 1)}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.72)$$

Si el problema fuera el externo, en este caso lo que pedimos es que el potencial vaya a 0 para $r \rightarrow \infty$ por lo que se tiene que $A_l = 0$ y

$$\Phi(r = a) = V(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (3.73)$$

En este caso los coeficientes B_l quedan determinados por la siguiente integral

$$B_l = \frac{(2l+1)a^{l+1}}{2} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.74)$$

Una alternativa como método para encontrar la solución es si conocemos la solución en una región del dominio, como los coeficientes A_l y B_l son únicos si se pueden determinar en esa región específica, éstos son los coeficientes para todo el dominio.

Supongamos por ejemplo que conocemos la solución en el eje de simetría, eje z ,

$$\Phi(r, \theta = 0, \pi) = V(z) \quad (3.75)$$

en el caso de z^+ , es decir $\theta = 0$, los coeficientes están normalizados para $x = 1$, $P_l(\cos 0) = 1$, entonces se tiene que

$$\Phi(r, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \quad (3.76)$$

en el caso de z^- , es decir $\theta = \pi$, $P_l(\cos \pi = -1) = (-1)^l$ entonces

$$\Phi(r, \pi) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]. \quad (3.77)$$

Ejercicio 3.13: Resolver el problema de Laplace típico, que ya resolvimos usando función de Green, una esfera que tiene potenciales opuestos. En el hemisferio superior el potencial es $+V$ y en el inferior es negativo $-V$.

3.4.1 Función de Green para un problema sin CCs con simetría azimutal

La función de Green para un problema sin condiciones de contorno, puede ser fácilmente determinada de la solución del potencial de una carga puntual en el espacio,

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (3.78)$$

si tomamos $q = 4\pi\epsilon_0$ tenemos que la función de Green para el problema es

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.79)$$

La solución general es como sabemos

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') dV'. \quad (3.80)$$

Si el problema a resolver tuviera simetría azimutal, es decir la densidad de carga es tal que tiene simetría azimutal lo mas conveniente es expandir la función de Green en los polinomios de Legendre (para utilizar la ortogonalidad de los polinomios).

Para determinar esta expansión haremos uso de la metodología explicada anteriormente, es decir determinamos los coeficientes en el eje z . Primero ponemos el punto carga $\vec{x}'$ en z ($\theta' = 0$) y luego expandimos en los $P_l(\cos \theta)$:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.81)$$

Notar que en el caso en que $\vec{x}'$ no este en el eje de simetría en lugar de tener el ángulo θ tendremos el ángulo γ que es el ángulo entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{x}'$.

Ahora escribimos al vector $\vec{x}$ en el eje z en este caso

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|r - r'|} \quad (3.82)$$

realizando un desarrollo de Taylor, para $r > r'$:

$$\frac{1}{r - r'} = \frac{1}{r(1 - r'/r)} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l, \quad (3.83)$$

para $r < r'$:

$$\frac{1}{r' - r} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l, \quad (3.84)$$

luego en una sola ecuación escribimos que:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l \quad (3.85)$$

donde debe interpretarse a $r_{<}$ es el menor de r y r' y en forma equivalente a $r_{>}$.

De esta manera hemos determinado los coeficientes A_l y B_l que dependerán de la magnitud de r' y r .

Luego podemos expresar al caso general:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{(l+1)}} P_l(\cos \gamma) \quad (3.86)$$

3.5 Problema general de simetría esférica

Comenzamos nuevamente con la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas pero ahora las condiciones de contorno y por lo tanto la solución depende de ϕ :

$$\frac{1}{r}\partial_{rr}^2(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\phi\phi}^2\Phi = 0 \quad (3.87)$$

Proponemos una solución separable en sus variables

$$\Phi = \frac{U}{r}P(\theta)Q(\phi) \quad (3.88)$$

Si sustituimos la solución propuesta en la ecuación diferencial (3.87) y multiplicamos por $\frac{r^2\sin^2\theta}{UPQ}$ la ecuación resultante es

$$\sin^2\theta \left[\frac{r^2}{U}\mathrm{d}_{rr}^2U + \frac{1}{P\sin\theta}\mathrm{d}_\theta(\sin\theta\mathrm{d}_\theta P) \right] + \frac{1}{Q}\mathrm{d}_{\phi\phi}^2Q = 0 \quad (3.89)$$

La ecuación que resulta es de la forma $f(\theta, r) + g(\phi) = 0$, por lo que las dos funciones f y g tienen que ser constantes:

$$\frac{1}{Q}\mathrm{d}_{\phi\phi}^2Q = -m^2 \rightarrow Q = \exp(\pm im\phi) \quad (3.90)$$

reemplazando en (3.87)

$$\frac{r^2}{U}\mathrm{d}_{rr}^2U + \frac{1}{P\sin\theta}\mathrm{d}_\theta(\sin\theta\mathrm{d}_\theta P) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0 \quad (3.91)$$

La ecuación que debe satisfacer para la coordenada r es:

$$\frac{r^2}{U}\mathrm{d}_{rr}^2U = l(l+1) \quad (3.92)$$

Finalmente para las coordenada θ tenemos

$$\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}_\theta(\sin\theta\mathrm{d}_\theta P) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P = 0 \quad (3.93)$$

La solución a este problema son los polinomios asociados de Legendre $P_l^m(x)$. Para que la solución sea finita en $-1 \leq x \leq 1$, l debería ser un entero positivo o 0 y $|m| \leq l$ y $-l \leq m \leq l$.

Las funciones asociadas de Legendre son un conjunto completo $-1 \leq x \leq 1$ y además son ortogonales es decir satisfacen la relación

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (3.94)$$

notar que la ortogonalidad es para un m fijo.

Por otro lado como es bien conocido la funciones $Q_m(\phi) = \exp(im\phi)$ forman un conjunto completo de soluciones en $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Por lo tanto $P_l^m Q_m$ es un conjunto completo en la esfera unitaria para los índices l y m .

El conjunto de autofunciones normalizadas sobre la esfera unitaria son:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.95)$$

Los Y_{lm} son denominados armónicos esféricos y por definición están normalizados en la superficie de la esfera unitaria, por lo que cumplen con la propiedad

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.96)$$

Por completitud podemos expresar a cualquier función sobre la esfera como una superposición de armónicos esféricos:

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.97)$$

donde $A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi)$.

La solución general en coordenadas esféricas es:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.98)$$

es decir que los armónicos esféricos satisfacen la ecuación:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.99)$$

donde los autovalores son $\lambda = -l(l+1)$.

Existe una degeneración en los m ya que estos pueden ir desde $-m$ hasta m . Es decir que existen $2l+1$ estados, i.e. autofunciones, con el mismo autovalor (todos los Y_{lm} con l fijo).

3.5.1 Teorema de adición de los armónicos esféricos

El teorema de adición de los armónicos esféricos expresa un polinomio de Legendre de $\cos \gamma$ en términos de una combinación lineal de armónicos esféricos:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.100)$$

Para demostrar este teorema existen varias alternativas. Jackson utiliza el hecho que los $P_l(\cos \gamma)$ satisfacen una ecuación de la forma (3.99) y por lo tanto puede ser expresada como una superposición de los armónicos esféricos para luego demostrar que los coeficientes de la superposición son los que establece el teorema (3.100). Una alternativa es una demostración por inducción dada por Coster y Hart la cual apareció en el AJP, 59, 1991.

3.5.2 Función de Green para un problema sin condiciones de contorno de simetría esférica

Una de las aplicaciones directas del teorema de adición es la expresión de la función de Green sin condiciones de contorno para el caso de coordenadas esféricas, como fue demostrado:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{(l+1)}} P_l(\cos \gamma) \quad (3.101)$$

por lo que una expresión en los armónicos esféricos es obtenida facilmente reemplazando la expresión dada por el teorema de adición de los armónicos esféricos

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{(l+1)}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.102)$$

3.6 Función de Green en coordenadas esféricas con CCs

Queremos encontrar la solución, Función de Green, al problema general de una fuente puntual en coordenadas esféricas con condiciones de contorno triviales en S dada en coordenadas esféricas. Esto es

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x}, \vec{x}') \quad (3.103)$$

con las condiciones de contorno de Dirichlet $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ en S . La superficie S asumimos viene definida en coordenadas esféricas.

Ponemos el término no homogéneo, correspondiente a una carga puntual, en coordenadas esféricas

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (3.104)$$

Como los armónicos esféricos son un conjunto completo de funciones en la esfera unitaria a cualquier función $f(\theta, \phi)$ se la puede escribir como una combinación lineal de los Y_{lm}

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.105)$$

Para determinar los coeficientes A_{lm} , multiplicamos por $Y_{l'm'}^*(\theta, \phi)$ a ambos lados de (3.105)

$$\int f(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega \quad (3.106)$$

usando la ortonormalidad de los armónicos esféricos, $\delta_{ll'} \delta_{mm'} = \int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega$, resulta

$$A_{lm} = \int f(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega'. \quad (3.107)$$

Si se quieren corroborar estas ecuaciones (3.105) y (3.107), se reemplazan los coeficientes (3.107) en (3.105)

$$f(\theta, \phi) = \int f(\theta', \phi') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega' \quad (3.108)$$

finalmente se utiliza la relación de completitud

$$\delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'), \quad (3.109)$$

demostrándose de esta manera que cualquier función en la superficie de la esfera unitaria puede ser escrita como una superposición de armónicos esféricos.

Para determinar la función de Green proponemos entonces que ésta viene expresada como una combinación lineal de los armónicos esféricos

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.110)$$

Si reemplazamos la serie en la ecuación diferencial y usando que los armónicos esféricos son funciones ortogonales por lo cual cada término de la serie debe anularse independientemente:

$$\nabla^2 [A_{lm}(r, r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)] = \frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.111)$$

Expandiendo el Laplaciano

$$\nabla^2 (A_{lm} Y_{lm}) = \frac{Y_{lm}}{r} \partial_{rr}^2 (r A_{lm}) + \frac{\nabla_{\theta\phi}^2 Y_{lm}}{r^2} \quad (3.112)$$

como hemos visto $\nabla_{\theta\phi}^2 Y_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}$ resultando

$$\frac{1}{r} \partial_{rr}^2 (r A_{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2} A_{lm} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r' - r) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (3.113)$$

por lo que de esta forma ya nos queda definida la dependencias de A_{lm} en

$$A_{lm}(r, r', \theta', \phi') = g(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (3.114)$$

La ecuación resultante para la parte radial es

$$\frac{1}{r} d_{rr}^2 (r g(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \quad (3.115)$$

Esta es la ecuación diferencial del problema radial, para $r = r'$ tenemos una ecuación homogénea, en cada pedazo $r > r'$ y $r < r'$ debemos proponer una solución con distintas constantes y luego tengo que satisfacer la discontinuidad en $r = r'$:

$$g_l = \begin{cases} A(r') r^l + B(r') r^{-(l+1)} & r < r' \\ A'(r') r^l + B'(r') r^{-(l+1)} & r > r' \end{cases} \quad (3.116)$$

por lo que hasta el momento tenemos la función de Green en coordenadas esféricas puede ser escrita como:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = g_l(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (3.117)$$

Supongamos el problema interior de la esfera.

Como no hay cargas en el origen la función debe ser finita en el interior de la esfera, i.e. $B_l = 0$. En $r = a$ $g_l(a, r') = 0$. Luego la función externa debe satisfacer que:

$$A' a^l + B' a^{-(l+1)} = 0 \quad (3.118)$$

Las soluciones resultantes son

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A(r') r^l \\ B'(r') \left(\frac{r^l}{a^{2l+1}} - r^{-(l+1)} \right) \end{cases} \quad (3.119)$$

Por simetría las dependencias en r' deberían ser similares a las de r por lo tanto

$$g_l(r, r') = \begin{cases} C r^l \left(\frac{r'^l}{a^{2l+1}} - r'^{-(l+1)} \right) \\ C r'^l \left(\frac{r^l}{a^{2l+1}} - r^{-(l+1)} \right) \end{cases} \quad (3.120)$$

notar que de esta forma hemos determinado las dependencias en r' de A y B' y por lo tanto C es una constante.

Para determinar C se analiza como es el salto impuesto por la función delta en $r = r'$. La metodología en estos casos es integrar la ecuación diferencial alrededor de $r = r'$:

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} d_{rr}^2(r g_l) dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\delta(r - r')}{r} dr \quad (3.121)$$

donde el término proporcional a g/r se asume que es continuo por lo que no contribuye si ϵ es suficientemente pequeño.

La ecuación resultante es

$$d_r(r g_l)|_{r'+\epsilon} - d_r(r g_l)|_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (3.122)$$

es decir que la derivada de $r g_l$ debe tener un salto en $r = r'$. Multiplicando por r a (3.120) y derivando con respecto a r obtenemos

$$d_r(r g_l)|_{r=r'} = \begin{cases} C(l+1) r'^l \left(\frac{r'^l}{a^{2l+1}} - r'^{-(l+1)} \right) \\ C r'^l \left((l+1) \frac{r'^l}{a^{2l+1}} + l r'^{-(l+1)} \right) \end{cases} \quad (3.123)$$

Luego restando los límites por izquierda y por derecha de (3.123) se debe satisfacer que

$$C \left\{ (l+1) \left[\frac{r'^{2l}}{a^{2l+1}} - r'^{-1} \right] - \left[(l+1) \frac{r'^{2l}}{a^{2l+1}} + l r'^{-1} \right] \right\} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (3.124)$$

de donde se deduce que la constante es

$$C = \frac{4\pi}{2l+1}. \quad (3.125)$$

De esta forma hemos determinado la función de Green para un problema en coordenadas esféricas la cual puede ser expresada en forma compacta por

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_{<}^l}{2l+1} \left(\frac{r_{>}^l}{a^{2l+1}} - r_{>}^{-(l+1)} \right) Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.126)$$

3.7 Problemas en coordenadas cilíndricas

El problema de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas podría ser considerado la extensión del problema de coordenadas polares que ya estudiamos. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\partial_{\rho\rho}\Phi + \frac{1}{\rho}\partial_{\rho}\Phi + \frac{1}{\rho^2}\partial_{\phi\phi}^2\Phi + \partial_{zz}^2\Phi = 0. \quad (3.127)$$

Proponemos una solución a esta ecuación con variable separables

$$\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z) \quad (3.128)$$

Las ecuaciones resultantes para cada una de las variables son

$$d_{zz}^2 Z - k^2 Z = 0 \quad (3.129)$$

$$d_{\phi\phi}^2 Q + \nu^2 Q = 0 \quad (3.130)$$

Finalmente la ecuación en ρ es

$$d_{\rho\rho}^2 R + \frac{1}{\rho}\partial_{\rho}R + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0 \quad (3.131)$$

Las soluciones para las coordenadas z y ϕ son:

$$Z = e^{\pm kz} \quad (3.132)$$

$$Q = e^{\pm i\nu\phi} \quad (3.133)$$

Realizando un cambio de variable $x = k\rho$ la ecuación que nos queda para R es

$$d_{xx}^2 R + \frac{1}{x}d_x R + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \quad (3.134)$$

Esta es la ecuación de Bessel (ver por ejemplo la tabla Schawm) cuya soluciones son las funciones de Bessel de orden ν :

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_{\nu}(x_{\nu n}\rho/a) \quad (3.135)$$

donde $x_{\nu n}$ es la raíz de $J(x_{\nu n}) = 0$.

Los coeficientes son estimados de la ecuación

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_{\nu} \left(\frac{x_{\nu n} \rho}{a} \right) d\rho \quad (3.136)$$

En general si ν es un entero las funciones linealmente independientes que se pueden tomar son las funciones de Bessel de primera clase J_{ν} y $J_{-\nu}$. En el caso que ν no sea entero se deben tomar también las funciones de Neumann $N_{\rho}(x)$ (función de Bessel de segunda clase).

Supongamos el problema de un cilindro cuya tapa en $z = l$ tiene condiciones de contorno $\Phi = V(\rho, \phi)$ y las otras caras vienen definidas por $\Phi = 0$.

Para que se anule en $z = 0$ nos queda que $Z = \sinh(kz)$

Para que nos cumpla continuidad en ϕ , $Q(0) = Q(2\pi)$, nos queda que

$$Q = A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi). \quad (3.137)$$

Mientras la solución en la parte radial es:

$$R(\rho) = C J_m(x_{mn}\rho/a) + D N_m(x_{mn}\rho/a) \quad (3.138)$$

La solución general es:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi)) J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) \quad (3.139)$$

Ahora tenemos que imponer la condición de contorno en $z = l$:

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a) \sinh(k_{mn}L)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \sin(m\phi) \quad (3.140)$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a) \sinh(k_{mn}L)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos(m\phi) \quad (3.141)$$

Capítulo 4

Multipolos

4.1 Expansión multipolar en coordenadas rectangulares

Si estamos en un problema sin condiciones de contorno en el cual existe una densidad de carga que esta *concentrada en una región* y observamos desde muy lejos el campo eléctrico que produce esta distribución de cargas, ¿cuál será la forma del campo eléctrico?. Uno podría pensar que si estamos muy lejos podríamos aplicar en forma aproximada una superficie Gaussiana esférica y por lo tanto el teorema de Gauss nos dice que el comportamiento del campo eléctrico a primer orden será dominado por el término de una carga puntual ubicada en el centro de la distribución de carga con carga total igual a la integral de la distribución de carga. Pero que sucede si la carga neta adentro de V es 0, es esperable que tengamos potencial eléctrico lejos de la distribución de carga?. En este capítulo buscamos generalizar esta metodología a fin de obtener las contribuciones de los términos de orden superior.

Veamos primero, el potencial y campo eléctrico que genera un dipolo ubicado en el origen de coordenadas y el punto de observación esta lejos del origen. Supongamos el dipolo esta formado por dos cargas puntuales q y $-q$ con una distancia d entre ellas, el potencial electrico viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_+|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_-|} \right) \quad (4.1)$$

Luego por el teorema del coseno, si γ es el ángulo entre el dipolo (vector que va desde la carga negativa hacia la positiva) y el vector $\vec{x}$,

$$|\vec{x} - \vec{x}_+|^{-1} = [r^2 - rd \cos \gamma + (d/2)^2]^{-1/2} \quad (4.2)$$

mientras para la carga negativa se tiene

$$|\vec{x} - \vec{x}_-|^{-1} = [r^2 - rd \cos(\pi - \gamma) + (d/2)^2]^{-1/2} = [r^2 + rd \cos(\gamma) + (d/2)^2]^{-1/2} \quad (4.3)$$

Si asumimos que $r \gg d$ luego podemos realizar una expansión en d/r y quedarnos con los dos primeros órdenes de la expansión,

$$|\vec{x} - \vec{x}_\pm|^{-1} = r^{-1} [1 \mp d/r \cos \gamma + (d/2r)^2]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \gamma \right). \quad (4.4)$$

Luego el potencial viene dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \gamma}{r^2} \quad (4.5)$$

vemos como la contribución de las cargas se anula, y aparece un término que decae como r^{-2} que tiene que ver con la magnitud y la istancia entre las cargas.

En el caso general de una distribución de carga *localizada*, el potencial viene dado por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (4.6)$$

Por lo que debemos encontrar la expansión en series de potencias de $|\vec{x} - \vec{x}'|$ para el caso en que $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$. El desarrollo de Taylor de una función arbitraria $f(\vec{x})$ alrededor de $\vec{x}_0$ es

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\Delta\vec{x} \cdot \nabla) f|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2} \Delta x_i \Delta x_j \partial_{x_i x_j}^2 f|_{\vec{x}_0} \quad (4.7)$$

El desarrollo de $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ alrededor de $|\vec{x}'| = 0$ nos da

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{|\vec{x}|} (\vec{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{|\vec{x}|} \dots \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2|\vec{x}|^5} \vec{x} \cdot (3\vec{x}' \vec{x}' - \mathbf{1}|\vec{x}'|^2) \cdot \vec{x} + \dots \quad (4.9)$$

Luego se reemplazar esta expansión en la expresión para el potencial (4.6),

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2|\vec{x}|^5} \vec{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{x} + \dots \right) \quad (4.10)$$

donde los primeros momentos de la distribución de carga vienen definidos por

$$q = \int \rho(\vec{x}') dV' \quad (4.11)$$

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{x}') \vec{x}' dV' \quad (4.12)$$

$$\mathbf{Q} = \int \rho(\vec{x}') (3\vec{x}' \vec{x}' - \mathbf{1}|\vec{x}'|^2) dV' \quad (4.13)$$

La primera ecuación q describe a la carga total del sistema, $\vec{p}$ describe al momento dipolar, y $\mathbf{Q}$ es el momento cuadrupolar.

Teniendo en cuenta las componentes de la matriz $\mathbf{Q}$, el momento cuadrupolar, el potencial eléctrico (4.10) se escribe como

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} + \dots \right] \quad (4.14)$$

Veamos las primeras dependencias del potencial y el campo eléctrico en función de los términos de la expansión. Campo eléctrico monopolar:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (4.15)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (4.16)$$

donde estamos interpretando a q como el coeficiente del término monopolar. Si miramos desde lejos una distribución de carga el término dominante será el monopolar y el campo tiene la forma al de una carga puntual con carga igual a la carga total de la distribución $q = \int \rho dV$. Es un campo divergente desde el origen para $q > 0$ o convergente al origen $q < 0$.

Campo eléctrico dipolar. Calculando el gradiente del término dipolar

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^2} \quad (4.17)$$

resulta

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\vec{p} \cdot \hat{r}) - \vec{p}}{r^3} \quad (4.18)$$

Ejercicio 4.1: Encuentre y grafique el campo eléctrico producido por un dipolo $\vec{p}$ alineado con el eje vertical. Compare con el campo eléctrico producido por dos cargas ubicadas en el eje z a una distancia d .

4.2 Expansión multipolar en coordenadas esféricas

Supongamos entonces una distribución de carga localizada, la cual se encuentra concentrada dentro de una esfera de radio a alrededor del origen. Dado que no existen condiciones de contorno la solución general del problema es dada por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (4.19)$$

Expresemos al término de la distancia entre punto fuente y observación $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ como una función de armónicos esféricos, como fue demostrado en (3.102),

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.20)$$

Pero dada la hipótesis que el punto de observación esta muy lejos y la carga esta concentrada entonces $|\vec{x}| > |\vec{x}'|$ resultando en

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.21)$$

Reemplazando (4.21) en la (4.6) se obtiene

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{x}') dV' \quad (4.22)$$

Por lo que tenemos en el término de la integral expresado las características particulares de la distribución de carga

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{x}') dV' \quad (4.23)$$

los q_{lm} se coeficientes constantes y se denominan momentos multipolares. Estos coeficientes definen la contribución de la distribución de carga para cada uno de los órdenes. Luego la solución en series de potencias de r^{l+1} , distancia al origen, viene dada por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (4.24)$$

dado que asumimos que estamos lejos comparado con la distribución de carga luego el término de la serie dominante será el primero con q_{lm} distinto de cero.

Se concluye que la forma mas simple de realizar el desarrollo en serie de potencias es en coordenadas esféricas donde naturalmente aparecen los términos de la distancia a la distribución de cargas.

4.3 Distribución multipolar de la energía de una distribución de cargas en un campo externo

En el caso de la energía de interacción entre una distribución de cargas y un campo eléctrico externo la energía viene dada por

$$W = \int \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) dV \quad (4.25)$$

notar la ausencia del término $1/2$ dado que es energía de interacción.

La expansión del potencial electrico externo viene dado por

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_{x_i} E_j(0) + \dots \quad (4.26)$$

Dada la equivalencia entre (4.25) y (4.6) la expansión resultante es equivalente si se intercambia la expansión de $|\vec{x} - \vec{x}'|$ por $\Phi(\vec{x})$,

$$W = q\Phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \partial_{x_i} E_j(0) + \dots \quad (4.27)$$

Es interesante notar que la carga interactúa con el potencial, el dipolo con el campo y el cuadrupolo con el gradiente del campo. Esto es de interés para las áreas de resonancia magnética dipolar o eléctrica cuadrupolar. Si aplicamos gradientes de campos eléctricos a la materia se pueden estudiar las características de los momentos cuadrupolares de los núcleos, mientras aplicando campos magnéticos (ya lo veremos) se pueden estudiar las características dipolares.

La energía de interacción entre dos dipolos $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ se determina teniendo en cuenta el campo eléctrico generado por un dipolo, (4.28),

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\hat{r}(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}) - \vec{p}_1}{r^3} \quad (4.28)$$

luego la energía de interacción solo contribuye el segundo término de (4.27) es decir $W_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(0)$ resultando en

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3(\vec{p}_2 \cdot \hat{n}) \cdot (\vec{p}_1 \cdot \hat{n}) + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}. \quad (4.29)$$

Capítulo 5

Medios materiales

Si queremos determinar el campo eléctrico que produce una distribución de cargas en la presencia de medios materiales, debemos tener en cuenta que los medios poseen cargas y éstas por un lado generan un campo eléctrico y por otro responderán a la presencia de campos externos. Sin embargo las cargas de los medios no son cargas libres y su movimiento se encuentra restringido al dominio atómico. Es decir entonces que la respuesta del material al campo eléctrico externo no es equivalente a la que se produce en un conductor donde las cargas se acomodan libremente a los efectos de “neutralizar” los efectos del campo en el interior del conductor.

La solución de encontrar el problema del campo eléctrico en la presencia de un medio material sería imposible si debemos tener en cuenta el campo generado por cada partícula elemental con carga, i.e. electrón y protón. Además las posiciones de las densidades de carga de estas partículas dependen del tiempo complicando aun mas el problema. De todas maneras existe una fuerte compensación de los efectos de los campos generados por las partículas por lo que si estamos interesados en escalas macroscópicas no deberíamos preocuparnos por las particularidades del campo en la pequeña escala pero si encontrar las ecuaciones que gobiernan los campos macroscópicos. El procedimiento consiste entonces en realizar una promediación de la escala molecular de tal manera de filtrar los comportamientos microscópicos del campo eléctrico.

Cuando se aplica un campo externo a un medio material, asumimos que el medio tiene carga neta total zero, por lo que el efecto mas importante será a nivel dipolar, en este sentido el momento dipolar cuando no existen campos externos se espera sea zero, cuando se aplica el campo los dipolos se alinearán en forma antiparalela al campo. Luego cuando queramos determinar el campo eléctrico no solo tenemos que tener en cuenta la contribución al campo de la densidad de carga $\rho(\vec{x})$ sino también la contribución al campo eléctrico debido al momento dipolar que produce el material.

En la presencia de un medio material, además de tener las cargas especificadas por el problemas, tendremos los momentos dipolares del material que también contribuyen al campo eléctrico.

Para trabajar con medios materiales entonces conviene tener en cuenta un campo, que

lo llamamos desplazamiento eléctrico que solo responda a las cargas libres, es decir la única fuente de ese campo es ρ ,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (5.1)$$

Decimos que $\vec{D}$ “ve” solo las cargas libres mientras que $\vec{E}$ ve todo. ¿cual es la relación que hay entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico? Para esto deberíamos conocer cual es el efecto de los momentos dipolares de las moléculas. Supongamos una molécula j con distribución de carga $\rho_j(\vec{x}')$, el centro de gravedad de la molécula es $\vec{x}_j$. Luego el potencial eléctrico generado por la molécula viene dado por

$$\Phi_j(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_j(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}_j - \vec{x}'|} dV' \quad (5.2)$$

Podemos pensar que la distribución de cargas de la molécula esta concentrada alrededor de $\vec{x}_j$ y por lo tanto $|\vec{x} - \vec{x}_j| \gg |\vec{x}'|$, luego se puede realizar una expansión multipolar manteniendo hasta el primer orden:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \vec{x}' \cdot \nabla_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|}. \quad (5.3)$$

El potencial eléctrico de la molécula resulta de reemplazar la expansión (5.3) en (5.2) resultando

$$\Phi_j(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\rho_j(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} dV' + \int \rho_j(\vec{x}') \vec{x}' dV' \cdot \nabla_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \right] \quad (5.4)$$

finalmente entonces el potencial eléctrico de la molécula de carga libre q_j y dipolo $\vec{p}_j$ es

$$\Phi_j(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \vec{p}_j \cdot \nabla_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \right] \quad (5.5)$$

El potencial eléctrico total en el material sumando sobre todas las moléculas será

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_j \Phi_j(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_j \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \sum_j \vec{p}_j \cdot \nabla_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} \right] \quad (5.6)$$

si asumimos que las moléculas son lo suficientemente pequeñas como para realizar una integración en lugar de una suma, entonces pensando una distribución de cargas y en un momento dipolar por unidad de volumen:

$$q_j \rightarrow \rho dV \quad (5.7)$$

$$p_j \rightarrow \vec{P} dV \quad (5.8)$$

donde $\vec{P}$ es el momento dipolar por unidad de volumen o polarización eléctrica. El potencial eléctrico resultante entonces es

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (5.9)$$

Usando integración por partes:

$$\int \vec{P}(\vec{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \int \left[\nabla \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (5.10)$$

$$\int \nabla \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \int \frac{\vec{P}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot d\vec{S}' = 0 \quad (5.11)$$

Luego el potencial resultante es

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}') - \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (5.12)$$

Es decir que en la presencia de un material el potencial eléctrico es producido no solo por la densidad de carga sino también por la divergencia de la polarización eléctrica. Aplicando el Laplaciano a ambos lados se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho(\vec{x}) - \nabla \cdot \vec{P} \right) \quad (5.13)$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho(\vec{x}) \quad (5.14)$$

luego se se compara (5.14) con (5.1) resulta que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.15)$$

esto nos relaciona al campo eléctrico con el desplazamiento eléctrico sin embargo esta ecuación no es de mucha utilidad ya que la polarización producida por el medio no es conocida de antemano. Lo que necesitamos es una *relación constitutiva* que nos relacione $\vec{D}$ con $\vec{E}$. Algunos casos específicos son:

- En el espacio libre vale que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$.
- Si el medio es isotrópico (propiedades físicas iguales en todas las direcciones) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ donde ϵ es un escalar constante.
- Si el medio es anisotrópico, ϵ es una matriz de 3x3 donde $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ es un producto matricial.

En el caso del medio isotrópico las relaciones que existen son, la polarización eléctrica viene dada por

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (5.16)$$

Algunas definiciones ϵ es la permitividad del medio, χ_e es la susceptibilidad eléctrica y ϵ/ϵ_0 es la constante dieléctrica.

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \quad (5.17)$$

Para determinar las condiciones de contorno se parte de,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5.19)$$

Integrando en un circuito entre los dos medios la primera y en un cilindrito la segunda se deduce que

$$E_{2\parallel} - E_{1\parallel} = 0 \quad (5.20)$$

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma \quad (5.21)$$

donde σ es la densidad de carga superficial en la interface entre los medios.

Ejercicio 5.1: Supongamos una esfera dieléctrica de radio a con constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 que se sumerge en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0$. Encontrar el potencial y la polarización eléctrica en todo el espacio y la densidad superficial de carga polarizada.

Comencemos con la ecuación de Laplace: en el interior de la esfera da

$$\Phi_I = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (5.22)$$

Afuera

$$\Phi_E = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (5.23)$$

Dado que en $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ la condición de contorno es un campo constante: $\Phi = -E_0 z$ entonces el potencial debería depender de

$$\Phi = -E_0 r \cos \theta \quad (5.24)$$

Esto significa que $B_l = 0$ con $l > 1$, $B_1 = -E_0$. Las condiciones de contorno en la superficie de la esfera son

$$E_{2pa} = E_{1pa} \quad (5.25)$$

$$D_{2pe} = D_{1pe} \quad (5.26)$$

Calculemos entonces los campos a partir del potencial

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta \Phi \quad (5.27)$$

Luego la condición de contorno es:

$$\partial_\theta \Phi_I(r = a) = \partial_\theta \Phi_E(r = a) \quad (5.28)$$

La segunda condición de contorno es

$$\epsilon \partial_r \Phi_I(r = a) = \epsilon_0 \partial_r \Phi_E(r = a) \quad (5.29)$$

De la primera condición de contorno se obtiene

$$A_1 = B_1 + C_1 a^{-3} \quad (5.30)$$

$$A_l = C_l a^{-(2l+1)} \quad (5.31)$$

De la segunda condición de contorno se obtiene

$$\epsilon/\epsilon_0 A_1 = B_1 - 2C_1 a^{-3} \quad (5.32)$$

$$\epsilon/\epsilon_0 A_l = -(l+1)/l C_l a^{-(2l+1)} \quad (5.33)$$

Entonces para $l > 1$ los coeficientes son nulos: $A_l = B_l = C_l = 0$. Mientras los coeficientes para $l = 1$ dan:

$$B_1 = -E_0 \quad (5.34)$$

$$C_1 = \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{2 + \epsilon/\epsilon_0} \right) E_0 a^3 \quad (5.35)$$

$$A_1 = \frac{-3}{2 + \epsilon/\epsilon_0} E_0 \quad (5.36)$$

El potencial es

$$\Phi_I = A_1 r P_1(\cos \theta) = -\frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} E_0 r \cos \theta \quad (5.37)$$

$$\Phi_E = \left(B_1 r + \frac{C_1}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (5.38)$$

En el interior el campo eléctrico es constante en la dirección z y viene dado por

$$E_I = \frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} E_0 \quad (5.39)$$

como $\epsilon > \epsilon_0$ el campo eléctrico interno es menor que el campo E_0 .

En el exterior tenemos la suma del campo eléctrico constante E_0 mas el campo debido a un dipolo. Teniendo en cuenta que la expresión para el campo de un dipolo alineado con el eje z es

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.40)$$

$$E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.41)$$

Luego el momento dipolar de la esfera dieléctrica es:

$$p = 4\pi \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} a^3 E_0 \quad (5.42)$$

La polarización es el momento dipolar por unidad de volumen:

$$\vec{P} = \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \vec{E}_0 \quad (5.43)$$

Debido al salto que hay en ϵ en la superficie de la esfera hay una discontinuidad de $\vec{P}$. Es decir que existirá una densidad superficial de cargas de polarización sobre la superficie de la esfera inducidas por el campo externo:

$$\sigma_p = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r} \quad (5.44)$$

$$\sigma_p = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} E_0 \cos \theta \quad (5.45)$$

esta densidad superficial de cargas produce un campo eléctrico que se opone al campo eléctrico externo.

5.1 Modelo constitutivo

5.1.1 Conductividad

Supongamos un metal en el cual la corriente esta relacionada linealmente al campo eléctrico externo que se aplica. Sea una carga libre, un electrón, que esta sujeto al campo eléctrico externo y a colisiones con los átomos de la sustancia, si su carga es e y su masa m , la ecuación de movimiento de la carga es

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\gamma\vec{v} + e\vec{E} \quad (5.46)$$

γ se interpreta como la constante de fricción debido a las colisiones de la carga con los átomos de la sustancia. La solución general de (5.46) es

$$\vec{v}(t) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} \vec{E}(t') dt' \quad (5.47)$$

Para determinar la densidad de corriente, si tenemos en cuenta que la densidad de electrones libres es n_e , entonces,

$$\vec{J}(t) = n_e e \vec{v}(t) = \frac{n_e e^2}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} \vec{E}(t') dt' \quad (5.48)$$

Si el campo eléctrico es constante en el tiempo se tiene que

$$\vec{J} = \frac{n_e e^2}{m\gamma} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (5.49)$$

el cual es conocido por la ley de Ohm, σ es la conductividad eléctrica.

Ejercicio 5.2: Determine la expresión de la densidad de corriente y de σ para el caso en que el campo eléctrico es sinusoidal en el tiempo.

5.1.2 Constante dieléctrica

Supongamos ahora el mismo modelo del electrón en una sustancia, pero asumimos que el electrón no está libre y está confinado a un átomo a través de una fuerza de un oscilador armónico, La ecuación de movimiento es

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\gamma \vec{v} + e\vec{E} \quad (5.50)$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición de la carga y ω_0 es la frecuencia natural de oscilación del electrón en el átomo. Supongamos el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(t) = \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t} \quad (5.51)$$

La ecuación para el vector posición es

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t} \quad (5.52)$$

La solución estacionaria viene dada por

$$\vec{r}(t) = \frac{e}{m} \text{Re} \left(\frac{\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega} \right) \quad (5.53)$$

La polarización del medio entonces viene dada por

$$\vec{P} = \frac{n_e e^2}{m} \text{Re} \left(\frac{\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega} \right) \quad (5.54)$$

$$= \text{Re} \left(\chi_e(\omega) \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t} \right) \quad (5.55)$$

donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica, la cual viene dada por

$$\chi_e(\omega) = \frac{n_e e^2}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2} \quad (5.56)$$

El campo de desplazamiento eléctrico es

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t) \quad (5.57)$$

$$= \epsilon_0 \text{Re}[(1 + \chi_e(\omega)) \vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}]. \quad (5.58)$$

5.2 Energía electrostática en medios dieléctricos

Veamos cual es el trabajo que tenemos que realizar al traer una carga libre infinitesimal al sistema que tiene un potencial Φ debido a cargas ya existentes, en un dielectrico. Teniendo en cuenta la expresión de la energía electrostática total,

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV \quad (5.59)$$

y considerando variaciones de ésta

$$\delta W = \frac{1}{2} \int (\rho \delta \Phi + \delta \rho \Phi) dV \quad (5.60)$$

si las propiedades del dieléctrico permanecen constantes y además es lineal se demuestra que

$$\delta \Phi / \Phi = \delta \rho / \rho \quad (5.61)$$

Luego resulta que $\rho \delta \Phi = \delta \rho \Phi$. De lo que se deduce que

$$\delta W = \int \delta \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) dV \quad (5.62)$$

La pequeña carga introducida produce un pequeño cambio en la divergencia del desplazamiento eléctrico

$$\nabla \cdot \delta \vec{D} = \delta \rho \quad (5.63)$$

El integrando resultante es

$$\Phi \delta \rho = \Phi \nabla \cdot \delta \vec{D} = \nabla \cdot (\Phi \delta \vec{D}) - \nabla \Phi \cdot \delta \vec{D} \quad (5.64)$$

La integral volumétrica de la divergencia se puede expresar como una integral en superficie:

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \delta \vec{D}) dV = \int_S \Phi \delta \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (5.65)$$

dado que $|\delta \vec{D}| \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, la integral en superficie se hace 0.

Luego resulta

$$\delta W = \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV \quad (5.66)$$

Para obtener la energía total debemos integrar el desplazamiento desde 0 hasta el valor de la configuración

$$W = \int \int_0^D \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV \quad (5.67)$$

En el caso en que exista una relación lineal entre $\vec{D}$ y $\vec{E}$, sea $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, se tiene

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon \delta (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \delta (\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (5.68)$$

La energía total en presencia de un dieléctrico es

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad (5.69)$$

en un problema sin condiciones de contorno.

5.2.1 Cambio de la energía electrostática debido a la presencia de un dieléctrico

Inicialmente la energía es

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 dV \quad (5.70)$$

Si introducimos un objeto de volumen V_1 y permitividad eléctrica ϵ_1 la variación de la energía es

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0) dV \quad (5.71)$$

Tratando de reescribir el producto interior

$$(\vec{E} + \vec{E}_0) \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = \vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 - \vec{E} \cdot \vec{D}_0 + \vec{E}_0 \cdot \vec{D} \quad (5.72)$$

Luego resulta que

$$\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 = (\vec{E} + \vec{E}_0) \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) + \vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{E}_0 \cdot \vec{D} \quad (5.73)$$

El cambio en la energía es dado por

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int [(\vec{E} + \vec{E}_0) \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) + (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{E}_0 \cdot \vec{D})] dV \quad (5.74)$$

La primera integral puede reescribirse teniendo en cuenta que $\vec{E} + \vec{E}_0 = -\nabla\tilde{\Phi}$, por lo cual resulta

$$-\frac{1}{2} \int \nabla\tilde{\Phi} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) dV = -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot [\Phi(\vec{D} - \vec{D}_0)] dV + \frac{1}{2} \int \Phi \nabla \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) dV \quad (5.75)$$

La primera integral se puede aplicar Gauss y dado que $|\vec{D} - \vec{D}_0| \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ y la segunda parte de la integral también se anula porque $\nabla \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = 0$ ya que las cargas no cambian.

Resulta entonces que el cambio de energía es

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0) dV \quad (5.76)$$

Afuera de V_1 esta integral se anula así que lo único que contribuye es V_1

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\epsilon_1 \vec{E} \cdot \vec{E}_0 - \epsilon_1 \vec{E} \cdot \vec{E}_0) dV \quad (5.77)$$

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E} \cdot \vec{E}_0 dV \quad (5.78)$$

Recordando que la polarización viene dada por

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (5.79)$$

entonces el cambio de energía es

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{P} \cdot \vec{E}_0 dV \quad (5.80)$$

Capítulo 6

Magnetostática

Las ecuaciones que representan la inducción magnética son

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (6.2)$$

denominaremos a $\vec{B}$ inducción magnética y reservamos el término campo magnético para referirnos a $\vec{H}$.

La esencia de la inducción magnética es distinta del campo eléctrico ya que no existe el monopolio magnético. Para condiciones de contorno triviales en estática la densidad de corriente eléctrica es la generadora de campo magnético. Estas diferencias intrínsecas entre los campos magnéticos y los campos eléctricos hicieron que inicialmente se los identificara como fenómenos independientes. Esto solo sucede así para campos estáticos.

Que condición necesitamos pedir para que la densidad de corriente sea estática, notar que de la condición de conservación de la carga:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.3)$$

de aquí se deduce que si $\partial_t \rho = 0$ entonces se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.4)$$

Luego para que $\vec{J}$ sea independiente del tiempo no debe haber acumulación o fuentes de cargas para un área fija $\nabla \cdot \vec{J} dV = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$.

En el caso que tengamos una corriente en un caño se debe cumplir que en los extremos del caño:

$$J_1 S_1 = J_2 S_2 \quad (6.5)$$

Si tenemos una línea de corriente hacemos el proceso límite

$$\vec{J} dV = I d\vec{l} \quad (6.6)$$

6.0.2 Ley de Ampere

La ley de Ampere nos relaciona la inducción magnética con la corriente que circula por una superficie transversal. Si integramos en una superficie a (6.2) se obtiene

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (6.7)$$

En el lado izquierdo de la ecuación usamos teorema de Stokes, mientras en el lado derecho notamos que la densidad de corriente que pasa transversal por una superficie es de hecho la corriente I (carga por unidad de tiempo) que atraviesa la superficie, de esta manera obtenemos la ley de Ampere,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (6.8)$$

Esta ley tiene un caracter similar a la ley de Gauss en electrostática, las cargas totales en un volumen estan ligadas al campo eléctrico en la superficie frontera y las corrientes en el interior de una superficie esta ligada a la inducción magnética en la curva que rodea a la superficie. Sin embargo notesé también la diferencia en el caracter vectorial entre el campo eléctrico y la inducción magnética, en el último caso la integral de la inducción magnética es una integral de línea a lo largo de la curva.

Si tenemos una corriente rectilínea I , circulando por un alambre, entonces la ley de Ampere integrando en un círculo de radio R alrededor del alambre establece que

$$B 2\pi R = \mu_0 I \quad (6.9)$$

por lo que la inducción magnética viene dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (6.10)$$

en el cual la dirección de la inducción magnética es paralela al círculo de radio R y tal que tiene el sentido de la mano derecha.

6.0.3 Vector potencial

En el caso del campo eléctrico el hecho que su rotor es nulo, se utilizó para expresar al campo como el gradiente de un función escalar, denominada potencial eléctrico, de tal manera que la ecuación resultante es la ecuación de Poisson para el potencial eléctrico. En el caso de la inducción magnética lo que se tiene es que la divergencia de ésta es nula, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Si definimos un campo vectorial $\vec{A}$, tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6.11)$$

entonces se encuentra que la ecuación de la divergencia de la inducción magnética se satisface siempre ya que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (6.12)$$

es válido para cualquier campo vectorial $\vec{A}$, a este campo vectorial $\vec{A}$ se lo denomina vector potencial (magnético).

La otra ecuación de Maxwell para la inducción magnética que debe satisfacer $\vec{A}$ es

$$\nabla \times (\nabla \nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (6.13)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}. \quad (6.14)$$

Así como el potencial eléctrico esta definido a menos de una constante aditiva, el vector potencial esta definido a menos del gradiente de una función escalar arbitraria. La inducción magnética dada por $\vec{A} + \nabla\psi$, es

$$\vec{B}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla\psi = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}. \quad (6.15)$$

Podemos usufructuar de esta arbitrariedad para expresar de la forma mas simple posible la ecuación diferencial que satisface el potencial vector, en este sentido de todos los posibles $\vec{A}$ que son solución vamos a elegir una específico, que sea el que nos simplifique las ecuaciones, este proceso se llama calibración o gauge. Tomamos a los campos vectoriales que satisfacen

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.16)$$

este es el denominado gauge de Coulomb. Las razones de esta denominación las veremos mas adelante. Si tenemos en cuenta a esta subconjunto de vectores potenciales posibles la ecuación que deben satisfacer es

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (6.17)$$

es decir que el vector potencial debe satisfacer una ecuación similar a la ecuación de Poisson que satisface el potencial eléctrico, sin embargo notesé el carácter vectorial de (6.17), por lo que en realidad si ésta es expresada en coordenadas, cada componente del vector potencial satisface una ecuación de Poisson con la componente correspondiente de la densidad de corriente como término no-homogeneo, por ejemplo

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x. \quad (6.18)$$

Para convencernos de que el gauge de Coulomb esta realmente comprendido dentro de las arbitrariedades que tiene la definición del vector potencial, supongamos que tenemos un potencial que no cumple,

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \alpha \quad (6.19)$$

esto puede ser reescrito como

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla\psi) = \alpha \quad (6.20)$$

para cualquier función arbitraria ψ , pero entonces podemos elegir una ψ que sea solución de la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \psi = \alpha \quad (6.21)$$

para esta ecuación ya sabemos que de existir condiciones que decaigan lo suficientemente rapido en el infinito, existirá una solución única de la ecuación, teorema de Helmholtz por lo tanto hemos encontrado la ψ que nos permite tener

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (6.22)$$

En el caso de que estemos en el espacio libre sin fronteras y tengamos una densidad de corriente $\vec{J}$, dada la similitud entre la ecuaciones se determina que el potencial vector viene dado por

$$\vec{A} = \int \frac{\vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (6.23)$$

Mientras la induccion magnética es

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \nabla \times \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (6.24)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' \quad (6.25)$$

6.1 Fuerza a cargas en movimiento

La ley de Lorenz establece que la fuerza que le ejerce el campo magnético a una carga en movimiento viene dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.26)$$

Si tenemos una corriente en un alambre la fuerza sentida por el alambre debido a un campo magnético externo es

$$d\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B} dq \quad (6.27)$$

si integramos a lo largo del alambre se obtiene

$$\vec{F} = \int I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (6.28)$$

si lo que tenemos es una densidad de corriente, $I d\vec{l} = \vec{J} ds$ entonces la fuerza viene dada por

$$\vec{F} = \int (\vec{J} \times \vec{B}) ds. \quad (6.29)$$

6.2 Campo magnético de una corriente localizada

De la misma manera que se aproximó el potencial eléctrico a través de una serie de potencias hacemos lo mismo para el potencial vector. La forma apropiada para realizar esta expansión es a través de los armónicos esféricos vectoriales sin embargo el tema excede a la materia por lo que solo veremos el primer orden no nulo del desarrollo.

Asumimos que la corriente esta localizada en una pequeña región y que el punto de observación se encuentra lejos. Luego si $\vec{x}' \ll \vec{x}$ tenemos que

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots \quad (6.30)$$

Si reemplazamos la expresión en la componente i -ésima del potencial vector se tiene que

$$A_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x}|} \int J_i(\vec{x}') dV' + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \int J_i(\vec{x}') \vec{x}' dV' + \dots \right] \quad (6.31)$$

Si la corriente $\vec{J}$ esta localizada, entonces la divergencia de

$$\int \nabla' \cdot (x'_i \vec{J}) dV' = 0 \quad (6.32)$$

por teorema de Gauss y asumiendo no existen condiciones de borde. Luego realizamos la expansión de la divergencia,

$$\int \vec{J} \cdot \nabla' x'_i + x'_i \nabla' \cdot \vec{J} dV' = 0 \quad (6.33)$$

de lo cual teniendo en cuenta que la divergencia de la densidad de corriente es nula deducimos que

$$\int J_i(\vec{x}') dV' = 0. \quad (6.34)$$

Entonces el primer término de la expansión de A_i , (6.31) se anula. El segundo término puede ser reescrito en la forma:

$$\vec{x} \cdot \int \vec{x}' J_i dV' = -\frac{1}{2} \left[\vec{x} \times \int (\vec{x}' \times \vec{J}) dV' \right]_i \quad (6.35)$$

resultando en

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{\int (\vec{x}' \times \vec{J}) dV' \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (6.36)$$

Ejercicio 6.1: Se deja como tarea al lector demostrar la igualdad, (6.35), expresando por componentes e identificando los términos.

Definiendo el momento magnético como

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') dV' \quad (6.37)$$

La magnetización o momento magnético por unidad de volumen se define como

$$\langle \vec{m} \rangle = \frac{1}{2} \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) \quad (6.38)$$

Se tiene que el potencial vector producido por un momento magnético es

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (6.39)$$

este corresponde al primer término no nulo en la expansión del potencial vector. De aquí se deduce, en forma equivalente a como se hizo en la expansión multipolar con el campo eléctrico, que el campo magnético viene dado por

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \quad (6.40)$$

La fuerza entre un campo magnético externo y una distribución de corriente localizada, dada por un momento magnético,

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.41)$$

El torque total que se ejerce sobre la distribución de corriente localizada es

$$\vec{N} = \int \vec{x}' \times [\vec{J} \times \vec{B}(0)] dV' \quad (6.42)$$

resultando en

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}(0) \quad (6.43)$$

6.3 Campos magnéticos en medios

Cuando existe materia, ésta está compuesta de electrones que pueden dar lugar a corrientes atómicas efectivas. Los electrones contribuyen al momento magnético a través de su movimiento orbital, sino que los momentos magnéticos intrínsecos también contribuyen al momento magnético macroscópico. Llamemos $\vec{J}_M$ a la densidad de corriente efectiva que produce la materia, luego la inducción magnética viene gobernada por

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M) \quad (6.44)$$

La densidad de corriente satisface que

$$\nabla \cdot \vec{J}_M = 0 \quad (6.45)$$

del teorema de Gauss se deduce que

$$\int \vec{J}_M \cdot d\vec{s} = 0 \quad (6.46)$$

por lo cual la densidad de corriente efectiva se puede escribir en función del momento magnético en la forma

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (6.47)$$

Reemplazando en (6.44) se deduce que

$$\nabla \times (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = \vec{J} \quad (6.48)$$

definiendo al campo magnético $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ (y notando que llamaremos inducción magnética a $\vec{B}$) tenemos que las ecuaciones de la magnetostática en medios son

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (6.49)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.50)$$

Además se requiere de una relación constitutiva que relacione a $\vec{B}$ con $\vec{H}$. Si estamos en presencia de un medio lineal la relación es

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6.51)$$

Si $\mu > \mu_0$ el medio es paramagnético, en cambio si $\mu < \mu_0$ el medio es diamagnético.

Los materiales ferromagnéticos cumplen con una relación no lineal conocida como el fenómeno de histéresis: $\vec{B} = \vec{F}(\vec{H})$.

¿Qué sucede con las ecuaciones si existe una relación no lineal? ¿Qué sucede con el principio de superposición? Sin embargo nótese que esto solo sucede en la presencia de medios y el material ferromagnético describe...

Las condiciones de contorno que deben satisfacer $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en las interfaces entre medios vienen dadas por

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6.52)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (6.53)$$

6.4 Métodos de solución de problemas magnéticos

6.4.1 Método del vector potencial

Si expresamos la inducción magnética en función del vector potencial $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, luego si asumimos que el medio es lineal $\vec{B} = \mu \vec{H}$ la ecuación que resulta es

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J} \quad (6.54)$$

Si la permeabilidad es una constante resulta que

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (6.55)$$

Si elegimos el gauge de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ resulta que

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (6.56)$$

6.4.2 Potencial escalar magnético

Si no existe densidad de corriente dentro del dominio luego: $\nabla \times \vec{H} = 0$, podemos trabajar un potencial magnético escalar:

$$\vec{H} = -\nabla\Phi_M \quad (6.57)$$

reemplazando en la ecuación de la divergencia:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi_M) = 0 \quad (6.58)$$

Si en cada subregión del dominio μ es constante entonces por pedazos se tiene

$$\nabla^2 \Phi_M = 0 \quad (6.59)$$

En este caso se debe usar las condiciones de contorno para $\vec{H}$ en la interface entre medios:

$$\vec{H}_{2\perp} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1\perp} \quad (6.60)$$

$$\vec{H}_{2\parallel} = \vec{H}_{1\parallel} \quad (6.61)$$

Si en cambio se trabaja con la inducción magnética, entonces se define un potencial magnético Ψ_M tal que $\vec{B} = -\nabla\Psi_M$ y en este caso se deben tomar las condiciones de contorno para $\vec{B}$.

6.4.3 Materiales ferromagnéticos

Los materiales ferromagnéticos en general tienen una magnetización $\vec{M}$ permanente o semipermanente que es independiente de los campos aplicados y se asume es conocida.

Potencial escalar

Si $\vec{J} = 0$ de nuevo tengo que $\nabla \times H = 0$, por lo que se puede definir un potencial escalar $\vec{H} = -\nabla\Phi_M$.

Con $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ reemplazando en la ecuación de la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (6.62)$$

Luego tenemos que

$$\nabla^2 \Phi_M = \nabla \cdot \vec{M} \quad (6.63)$$

si definimos a una densidad magnética como

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} \quad (6.64)$$

La ecuación resultante es equivalente a la ecuación de Poisson en electrostática la cual es

$$\nabla^2 \Phi_M = -\rho_M. \quad (6.65)$$

Si no hay condiciones de contorno la solución es la de un problema electrostático es decir:

$$\Phi_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (6.66)$$

Si hay discontinuidades en $\vec{M}$, por ejemplo un objeto magnetizado, debemos considerar su contribución:

$$\Phi_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} ds' \quad (6.67)$$

donde $\sigma_M = \hat{n}' \cdot \vec{M}$.

Potencial vector

De la ecuación del rotor asumiendo no existen corrientes libres se deduce que

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = 0 \quad (6.68)$$

si reemplazamos $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ tenemos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \nabla \times \vec{M} \quad (6.69)$$

representando a $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$, bajo el gauge de Coulomb resulta que

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_M. \quad (6.70)$$

La solución para un problema sin condiciones de contorno viene dada por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (6.71)$$

Los materiales ferromagnéticos están caracterizados por una magnetización constante (en forma temporal), la cual se asume conocida. Estos problemas pueden ser tratados como un problema electrostático con una densidad de carga $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$, o como un problema de magnetostática en el vacío con una corriente dada por $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$.

6.5 Esfera con magnetización constante

Supongamos una esfera ferromagnética de radio a con una magnetización

$$\vec{M} = M\hat{k} \quad (6.72)$$

En el interior de la esfera se tiene $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ por lo que el potencial escalar magnético viene dada

$$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} ds' \quad (6.73)$$

para realizar la integral notar que

$$\vec{M}(\vec{x}') \cdot \hat{n}' = M \cos \theta' \quad (6.74)$$

las dependencias en θ son equivalentes a la función Y_{10} , por lo que podemos expresar al término $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ como una expansión en armónicos esféricos y luego utilizar la ortonormalidad de estos,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (6.75)$$

La integral superficie resultante, utilizando la ortonormalidad de los ylm es:

$$\Phi_M = \frac{Ma^2}{3} Y_{10} \oint \frac{r_{<}}{r_{>}^2} Y_{10}^*(\theta', \phi') \cos \theta' d\Omega' \quad (6.76)$$

recordando que

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (6.77)$$

Luego el potencial escalar magnético es

$$\Phi_M = \frac{1}{3} Ma^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \quad (6.78)$$

Adentro de la esfera se tiene que $r_{<} = r$ y $r_{>} = a$ luego resulta que

$$\Phi_M = \frac{1}{3} Mr \cos \theta = \frac{1}{3} Mz \quad (6.79)$$

entonces el campo magnético

$$\vec{H} = -\partial_z \Phi_M \hat{k} = -\frac{M}{3} \hat{k} \quad (6.80)$$

La inducción magnética es

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 M \hat{k} \quad (6.81)$$

Afuera de la esfera se tiene $r_{<} = a$ y $r_{>} = r$ resultando en

$$\Phi_M = \frac{1}{3} M_0 a^3 \cos \theta / r^2 \quad (6.82)$$

es decir que afuera de la esfera el campo tiene la forma de un campo dipolar.

6.6 Campos magnéticos quasi-estáticos en conductores

Cuando se empiezan a analizar las ecuaciones de electrostática-magnetostática con campos que varían lentamente con el tiempo aparece la ley de Faraday la cual en forma diferencial establece que

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (6.83)$$

Esta ley fue producto de experimentos realizados por Faraday en los cuales se ubicaba circuitos, espiras, en campos magnéticos que varían en el tiempo. Faraday observó que en la espira se induce una corriente transitoria, en términos matemáticos encontró que el cambio de flujo magnético en un circuito es igual a la fuerza electromotriz alrededor del circuito,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da. \quad (6.84)$$

Esta ley entonces nos relaciona los cambios temporales de la inducción magnética con el campo eléctrico. Usando el teorema de Stokes en el primer término de (6.84) y asumiendo que el circuito es fijo y no cambia en el tiempo se determina (6.83).

Por supuesto existe otro término en las ecuaciones de Maxwell, que expresa las variaciones temporales del campo eléctrico y como estas generan campos magnéticos, es el término $\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$ en el rotor del campo magnético, sin embargo si los campos varían lentamente el término puede ser considerado despreciable. Por lo que por el momento consideramos las ecuaciones de Maxwell pero sin este término, denominado término de desplazamiento de Maxwell.

Si tenemos en cuenta la ley de Ohm para un material conductor, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ y que $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ resulta que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} \quad (6.85)$$

Reemplazando esta ecuación en la ley de Faraday, (6.83), encontramos que

$$\partial_t \vec{B} - \mu \sigma \nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (6.86)$$

esta es la ecuación de difusión.

En forma equivalente se puede encontrar la ecuación para el campo eléctrico

$$\mu \sigma \partial_t \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (6.87)$$

Si tenemos un campo eléctrico que varía sinusoidalmente en x , $E_z(z, t) = \hat{E}_z(t) e^{-ikx}$, la forma de la solución vendrá dada por

$$E_z(z, t) = E_{0z} e^{-\frac{k^2}{\mu \sigma} t - ikx} \quad (6.88)$$

es decir que la señal decae con un tiempo de decaimiento de $\tau = \frac{\mu \sigma}{k^2}$.

Si pensamos en un campo del tipo sinusoidal temporalmente, en una dimensión, ej. $E_z(x, t) = \hat{E}_z(x)e^{-i\omega t}$, entonces la ecuación resultante será

$$\mu\sigma i\omega\hat{E}_z - \partial_{xx}^2\hat{E}_z = 0 \quad (6.89)$$

luego tenemos que la solución será $E_z(x, t) = \hat{E}_{0z}e^{-i\omega t + \gamma x}$ con $\gamma = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu\sigma\omega}$. La solución tiene forma sinoidal en x pero además un decaimiento espacial (o penetración cuando se piensa en como penetran los campos a un conductor) de

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (6.90)$$

Ejercicio 6.2: Supongamos un material conductor dieléctrico con μ, σ en $z > 0$ y vacío en $z \leq 0$, en $z = 0$ se pone un campo magnético de la forma $H_x(t) = H_0 \cos(\omega t)$.

Capítulo 7

Campos variables en el tiempo

En el capítulo anterior trabajando con un conjunto de ecuaciones que denominamos aproximación quasi-estática las cuales en el vacío vienen expresadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (7.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.4)$$

Si aplicamos la divergencia a la ecuación del rotor del campo magnético, (7.3),

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} \quad (7.5)$$

dado que la divergencia del rotor de cualquier campo vectorial es nulo, se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (7.6)$$

El conjunto de ecuaciones lentamente variable en el tiempo no cumple con la ecuación de conservación de la carga general, sino que tendría como hipótesis que la ρ se mantiene constante.

Sin embargo para campos variables en el tiempo la corriente debería ser de la forma

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (7.7)$$

Esta inconsistencia de las ecuaciones del electromagnetismo fue notada por primera vez por Maxwell, quien propuso agregar un término extra para que las ecuaciones del electromagnetismo, luego llamadas de Maxwell, satisfagan con la forma general de conservación de la carga. Lo que se plantea entonces es proponer un término extra en la ecuación del rotor del campo magnético, (7.3), que resulte en la ecuación (7.7). Pero de hecho el término extra, $\partial_t \rho$ lo podemos directamente asociar a (7.1),

$$\partial_t \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \partial_t \vec{E} \quad (7.8)$$

Entonces si agrego un término extra, $\epsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}$, a (7.3) luego cuando se aplica la divergencia resulta en $\mu_0\partial_t\rho$.

Es decir que el conjunto de ecuaciones completo del electromagnetismo en un medio material es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (7.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} \quad (7.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \quad (7.12)$$

7.1 Vector potencial

Las ecuaciones de Maxwell estan escritas en una forma donde las variables no son todas independientes entre si, y las ecuaciones tampoco, tenemos 8 ecuaciones y 6 variables. Para simplificar la resolución general de un problema electromagnético lo que se debe hacer es transformar las variables y el conjunto de ecuaciones a uno mas simple. Esto se lleva a cabo, de la misma manera que lo hicimos en electrostática y en magnetostática, a través de potenciales. Para el caso del vector potencial usamos de hecho la misma definición que en el caso estático.

Para reescribir el conjunto completo de ecuaciones en función de potenciales comencemos por la ecuación (7.11), la cual es satisfecha para cualquier potencial vector $\vec{A}$ definido por

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (7.13)$$

Claramente no podemos definir directamente al campo eléctrico como el gradiente de un escalar, como hicimos en el caso estático, pero reemplazando (7.13) en (7.14), se obtiene que

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t\vec{A}) = 0. \quad (7.14)$$

Luego podemos proponer un potencial escalar que sea definido por

$$\vec{E} + \partial_t\vec{A} = -\nabla\Phi \quad (7.15)$$

El campo eléctrico queda determinado si conocemos a Φ y $\vec{A}$ por

$$\vec{E} = -\partial_t\vec{A} - \nabla\Phi \quad (7.16)$$

Las ecuaciones resultantes en el vacío son

$$\nabla^2\Phi + \partial_t(\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon_0 \quad (7.17)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2\vec{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi\right) = -\mu_0\vec{J} \quad (7.18)$$

Éstas ecuaciones están acopladas entre ellas, sin embargo podemos elegir la arbitrariedad que tenemos en elegir los potenciales para simplificarlas y desacoplarlas, existen dos 'gauges' muy utilizados. El gauge de Coulomb y el de Lorenz.

7.1.1 Gauge de Coulomb

En el caso del gauge de Coulomb se toma que el potencial vector debe satisfacer:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (7.19)$$

En este caso el conjunto de ecuaciones resultantes son:

$$\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (7.20)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \partial_t \Phi \quad (7.21)$$

La solución a la primer ecuación, (7.20) es el potencial de Coulomb instantaneo:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (7.22)$$

este potencial es equivalente al de electrostática, pero para la distribución de carga que existe en el momento t .

Para resolver (7.21) es conveniente escribir a la corriente en una componente irrotacional y una componente solenoidal,

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \quad (7.23)$$

donde $\nabla \times \vec{J}_l = 0$, $\nabla \cdot \vec{J}_l = \nabla \cdot \vec{J}$ y por otro lado $\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$, $\nabla \times \vec{J}_t = \nabla \times \vec{J}$. De las ecuaciones para $\vec{J}_l$, en forma equivalente al campo eléctrico estático, se deduce que el gradiente del campo viene dado por

$$\nabla \vec{J}_l = \frac{1}{4\pi} \int \frac{-\nabla \cdot \vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (7.24)$$

Usando que (7.22) derivando con respecto al tiempo y teniendo en cuenta la ecuacion de conservacion de la carga se obtiene que

$$\partial_t \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{-\nabla \cdot \vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (7.25)$$

resultando que

$$\frac{1}{c^2} \nabla \partial_t \Phi = \mu_0 \vec{J}_l. \quad (7.26)$$

Mientras la ecuación para el vector potencial es:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_t. \quad (7.27)$$

7.1.2 Gauge de Lorenz

En el gauge de Lorenz, tomamos que el potencial vector satisface la condición

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0. \quad (7.28)$$

Ejercicio 7.1: Demostrar que realmente se puede tomar esta condición como una consecuencia de la libertad que tenemos en la elección del potencial vector.

Luego las ecuaciones resultantes tienen la forma familiar de 4 ecuaciones de ondas en 3D independientes con términos de forzado:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (7.29)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (7.30)$$

La velocidad de fase de las ondas, representadas en (7.29) y (7.30), es la velocidad de la luz, por otro lado queda establecido de las ecuaciones que las ondas electromagnéticas son no dispersivas en el vacío, dado que la frecuencia de las ondas depende linealmente del número de onda, o dicho de otro modo la velocidad de fase de las ondas es la misma para ondas de cualquier frecuencia. Entonces, las ondas electromagnéticas se pueden propagar largas distancias sin disminuir notablemente la amplitud. Las fuentes de las ondas son las variaciones temporales de corrientes o densidades de carga (y por supuesto los contornos en un problema limitado por una superficie cerrada).

7.2 Funciones de Green para la ecuación de ondas

En el gauge de Lorenz las ecuaciones resultantes tanto para Φ , (7.29), como para $\vec{A}$, (7.30), son las ecuaciones de ondas desacopladas. También en el caso del gauge de Coulomb se obtuvo para el potencial vector una ecuación de ondas. Veamos en general como se puede resolver la ecuación de ondas para una variable Ψ tal que

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \Psi = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (7.31)$$

es decir tenemos una ecuación de ondas 3D, donde no hay dispersión y la velocidad de fase es c , con un término de forzado f .

En el caso en que tengamos simetría esférica la ecuación de ondas resultante es

$$\frac{1}{r} \partial_{rr}^2 (r\Psi) - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \Psi = 0 \quad (7.32)$$

Asumiendo que la condición inicial es:

$$\Psi(r, t = 0) = \frac{F(r)}{r} \quad (7.33)$$

Debido a que no hay dispersión la onda conservará la forma inicial, las soluciones posibles (Dependiendo de la otra condición inicial necesaria) son

$$\Psi(r, t) = A \frac{F(r - ct)}{r} + B \frac{F(r + ct)}{r} \quad (7.34)$$

donde por (7.33) se tiene que $A + B = 1$.

Entonces la forma inicial que tenía Ψ en $t = 0$ se mantiene a lo largo del tiempo, la ecuación de ondas no dispersivas lo único que hace es mover la forma inicial, la condición inicial, con una velocidad $+c$ y con $-c$. De (7.34) vemos que el primer término de la solución se propaga con velocidad $+c$ mientras el segundo término se propaga con $-c$. Si inicialmente tenemos un anillo gaussiano, parte de la solución se propagará hacia afuera mientras la otra se propagará hacia el origen.

Para resolver la ecuación no homogénea utilizamos el método de la función de Green, la cual debe ser solución de la ecuación:

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 G = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (7.35)$$

es decir que queremos ver como el operador de ondas evoluciona una fuente de forzado que esta localizada en $\vec{x} = \vec{x}'$ y $t = t'$.

Proponemos escribir a G como una integral de Fourier por definición es

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\omega}(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.36)$$

Teniendo en cuenta que la función delta viene dada por

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (7.37)$$

La ecuación resultante es:

$$\nabla^2 \hat{G}_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{G}_{\omega} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') e^{-i\omega t'} \quad (7.38)$$

Tenemos una ecuación solo en el espacio, si asumimos simetría esférica el problema se simplifica a:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R \hat{G}_{\omega}) + k^2 \hat{G}_{\omega} = -4\pi \delta(\vec{R}) \quad (7.39)$$

donde $k = \omega/c$. La solución para $\vec{R} \neq 0$ es

$$\hat{G}_{\omega} = A_{\pm} \frac{\exp(\pm i k R)}{R} \quad (7.40)$$

Para encontrar las constantes integramos la ecuación (7.38) en un volumen que comprenda a $\vec{R} = 0$ (un esfera de radio ϵ):

$$\int [\nabla^2 \hat{G} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{G}] dV = -4\pi \int \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV e^{-i\omega t'} \quad (7.41)$$

Teniendo en cuenta que G es continua el segundo término del LHS de (7.41) se anula si la integración es en un volumen infinitesimal, mientras el primero permanece, pero entonces esto es esencialmente lo que se tenía en electrostática:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (7.42)$$

Deducimos que las constantes $A_{\pm} = 1$. La solución volviendo al espacio físico es

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (7.43)$$

Luego usando $k = \omega/c$ reescribimos a (7.43) como

$$G_{\pm}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[\pm R/c - (t-t')]} d\omega \quad (7.44)$$

El cual es la definición de la función delta, por lo que queda

$$G_{\pm} = \frac{\delta(t' - t \pm R/c)}{R} \quad (7.45)$$

G_+ es la función de Green retardada. Un efecto observado en el punto $\vec{x}$ y en el tiempo t es causado por una fuente que esta a una distancia R y fue producido en un tiempo anterior. La información se propaga desde las fuentes en círculos concéntricos y luego esta información es recibida en el punto de observación. Dado que estamos con ondas no-dispersivas no hay ningun tipo de dispersión. Si la fuente fue una delta esta se conserva en el tiempo. No hay ensanchamiento-dispersión de los disturbios, los cuales siguen localizadas espacio-temporalmente. La funcion original se mueve por el espacio desde su punto espacio-temporal fuente hasta el punto de observación conservando su forma.

La solución particular, no homogenea, es:

$$\Psi_N(\vec{x}, t) = \int \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t') dV' dt' \quad (7.46)$$

Para encontrar la solución general se debe agregar la solución homogenea:

$$\Psi = \Psi_{in} + \int \int G_+ f dV' dt' \quad (7.47)$$

Resultando en:

$$\Psi = \Psi_{in} + \int f|_{t'=t-R/c} dV' \quad (7.48)$$

el tiempo $t' = t - R/c$ es lo que llamamos tiempo retardado.

La condición que debe satisfacer es:

$$\Psi = \Psi_{in} \quad \text{para} \quad t \rightarrow \infty \quad (7.49)$$

es decir que la interpretamos como la condición inicial a tiempos remotos.

En el caso de la solución adelantada se tiene que

$$\Psi = \Psi_{out} + \int \int G_- f \, dV' dt' \quad (7.50)$$

$$\Psi = \Psi_{out} + \int \int f|_{t'=t+R/c} \, dV' dt' \quad (7.51)$$

La condición que debe satisfacer la solución adelantada es:

$$\Psi = \Psi_{out} \quad para \quad t \rightarrow \infty \quad (7.52)$$

Esta solución no es muy representativa físicamente, tenemos especificada las condiciones finales del problema.

Ejercicio 7.2: Supongamos que tenemos una fuente lineal en z , tal que $f(\vec{x}, t) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t')$. Para resolver este problema se debe hacer uso de la solución 3D e integrar la superposición de fuentes ubicadas a lo largo del eje z .

7.3 Conservación de la energía

En general siempre las leyes de conservación están siempre “escondidas” en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno por ejemplo las ecuaciones de Maxwell. La ecuación de la carga, de la energía, y el momento pueden ser deducidas de la ecuaciones sin utilizar información o “física” extra.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (7.53)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (7.54)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \quad (7.55)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.56)$$

Multiplico escalarmente (7.54) por $\vec{H}$ y (7.55) por $\vec{E}$, es decir se busca que obtener derivadas temporales cuadráticas de los campos,

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} = 0 \quad (7.57)$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = 0 \quad (7.58)$$

Restando estas ecuaciones se obtiene

$$\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} \quad (7.59)$$

Si se asume que $\vec{H}$ es proporcional a $\vec{B}$ y que $\vec{E}$ es proporcional a $\vec{D}$ se tiene

$$\frac{1}{2} \partial_t (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\vec{E} \cdot \vec{J} \quad (7.60)$$

notando que $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$, obtenemos la ecuación de conservación de la energía electromagnética

$$\partial_t u_{EM} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (7.61)$$

donde $u_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D})$ es la densidad de energía electromagnética, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ es la densidad de flujo de energía también conocida como el vector de Poynting.

Notar que el término $-\vec{J} \cdot \vec{E}$ esta actuando como fuente o sumidero de la energía electromagnética, es el trabajo hecho sobre el campo por unidad de tiempo y de volumen, este término representa la conversión de energía mecánica en energía electromagnética. Si tenemos en cuenta a la energía mecánica,

$$\frac{dU_{ME}}{dt} = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (7.62)$$

luego se tiene que

$$\partial_t (u_{EM} + u_{ME}) + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (7.63)$$

7.4 Teorema de Poynting en medios dispersivos

Hasta el momento hemos asumido que los medios son conservativos es decir ϵ and μ constantes reales. En general los medios tienen dispersión y pérdidas. Entonces esperamos que aparezcan términos de pérdidas en la ecuación de conservación de la energía. En este caso ϵ depende de la frecuencia y es un número complejo cuya parte real dependiente de ω representa la dispersión y la componente imaginaria representa la disipación. Comenzamos por expresar a los campos en el espacio espectral

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.64)$$

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.65)$$

Sabemos entonces que la relación que existe entre el campo eléctrico y el desplazamiento es,

$$\hat{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \hat{E}(\vec{x}, \omega) \quad (7.66)$$

notar que ésta relación es en el espacio espectral.

Esperamos que en la ecuación de conservación de energía deberían aparecer nuevos términos que representen las pérdidas y la dispersión en la ecuación. De la deducción que ya hicimos no es válido el razonamiento

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} \neq \frac{1}{2} \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (7.67)$$

Si representamos al desplazamiento en el espacio espectral usando (7.66) en por

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \hat{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.68)$$

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2} (\vec{E}^* \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}^*) \quad (7.69)$$

El término del cambio temporal de la densidad de energía electromagnética viene dado por (7.65)

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2} \int \int [-i\omega \epsilon(\omega)] \hat{E}(\omega) \hat{E}^*(\omega') e^{-i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' + CC \quad (7.70)$$

Es decir

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2} \int \int [-i\omega \epsilon(\omega) + i\omega' \epsilon^*(\omega')] \hat{E}(\omega) \hat{E}^*(\omega') e^{-i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' \quad (7.71)$$

Teniendo en cuenta que los campos son reales, vale que $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ y $\epsilon^*(-\omega) = \epsilon(\omega)$, y realizando un desarrollo de Taylor de ϵ^* , se obtiene que

$$i\omega' \epsilon^*(\omega') = i\omega \epsilon^*(\omega) + i(\omega' - \omega) \partial_{\omega'} [\omega' \epsilon^*(\omega')] |_{\omega} \quad (7.72)$$

de lo cual se deduce que

$$-i\omega \epsilon(\omega) + i\omega' \epsilon^*(\omega') = -i\omega [\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega)] + i(\omega - \omega') \partial_{\omega'} [\omega' \epsilon^*(\omega')] |_{\omega} \quad (7.73)$$

Reemplazando (7.73) en (7.71),

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2} \int \int \hat{E}^*(\omega') \hat{E}(\omega) [2\omega \text{Im} \epsilon(\omega) - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} (\omega \epsilon^*)] \quad (7.74)$$

el primer término representa la pérdida de energía electromagnética por calor y el segundo término,

La ecuación resultante si pensamos en un paquete de ondas con frecuencia ω_0 (es decir la energía esta concentrada alrededor de una frecuencia característica),

$$\partial_t u_{efec} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \omega_0 \text{Im}(\epsilon(\omega_0) \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle - \omega_0 \text{Im}(\mu \langle \vec{H} \cdot \vec{H} \rangle)) \quad (7.75)$$

donde la densidad de energía efectiva es

$$u_{efec} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{d}{d\omega} (\omega \epsilon) \right) \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle + \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{d\omega \mu(\omega_0)}{d\omega} \right) \langle \vec{H} \cdot \vec{H} \rangle \quad (7.76)$$

7.5 Conservación del momento electromagnético

Para demostrar la conservación del momento electromagnético comenzamos nuevamente de las ecuaciones de Maxwell. Multiplicando (7.9) producto vectorial por $\epsilon_0 \vec{E}$ y (7.10) producto vectorial por $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + \epsilon_0 \partial_t \vec{B} \times \vec{E} = 0 \quad (7.77)$$

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \partial_t \vec{E} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.78)$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.79)$$

Sumando $\rho \vec{E}$ a ambos lados de la ecuación resulta

$$\epsilon_0 \partial_t(\vec{E} \times \vec{B}) + \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \epsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} \vec{E} \quad (7.80)$$

Definiendo por un lado al momento mecánico por unidad de volumen como

$$\frac{d\vec{p}_{ME}}{dt} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.81)$$

y el momento electromagnético por unidad de volumen como

$$\frac{d\vec{p}_{EM}}{dt} = \partial_t \epsilon_0(\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7.82)$$

Reemplazando estas definiciones en

$$\partial_t(\vec{p}_{EM} + \vec{p}_{ME}) = \epsilon_0 \left\{ \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times \nabla \times \vec{E} \right] + c^2 \left[(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \right] \right\} \quad (7.83)$$

Ejercicio 7.3: Expresando en componentes el operador y reorganizado términos demostrar que

$$[\vec{E} \nabla \cdot \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})]_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (7.84)$$

Definimos al tensor de stress electromagnético de segundo orden por

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 [E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{E} + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}) \delta_{\alpha\beta}] \quad (7.85)$$

La razón de cambio del momento viene dada por

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{EM} + \vec{p}_{ME})_\alpha = \sum_\beta \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta} \quad (7.86)$$

donde el tensor de flujo de momento electromagnético $T_{\alpha\beta}$ lo expresamos como $\overleftrightarrow{T}$ de tal manera que la expresion diferencial queda como una divergencia del tensor:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{EM} + \vec{p}_{ME})_\alpha = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}. \quad (7.87)$$

Si integramos en un volumen fijo a (7.87) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{EM} + \vec{P}_{ME})_\alpha = \sum_\beta \int \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta} dV \quad (7.88)$$

$$= \int_S \sum_\gamma T_{\alpha\gamma} u_\gamma ds \quad (7.89)$$

expresado en forma vectorial

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{EM} + \vec{P}_{ME}) = \int_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{s} \quad (7.90)$$

Entonces obtenemos una ecuación de conservación integral en la cual el flujo de momento electromagnético entrante o saliente de la región en consideración nos produce cambios en el momento del sistema. Entonces el flujo de momento electromagnético conlleva un stress y de allí la supuesta existencia del eter.

Al momento electromagnético lo llamamos

$$\vec{g} = \vec{p}_{EM} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} \quad (7.91)$$

notar que el flujo de energ'ia, vector de Poynting, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ por lo que

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}. \quad (7.92)$$

7.5.1 Presión de radiación

Reinterpretando (7.90) vemos que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{ME} = -\frac{d}{dt} \vec{P}_{EM} + \int_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{s} \quad (7.93)$$

Esta es la fuerza que le ejerce el campo electromagnético a los cuerpos.

Supongamos una onda electromagnetica que se propaga en el vacio, la onda en un tiempo δt cubrirá un volumen dado por $c\delta t A$ en una sección de área transversal A a la dirección de propagación, el momento de radiación por unidad de volumen es $\vec{g}$.

El momento de radiación adentro del volumen considerado es

$$\vec{P}_{EM} = |\vec{g}| A c \delta t \quad (7.94)$$

si esta onda es totalmente absorbida por una superficie, una vela absorbente, entonces la superficie sufrirá un impulso ejercido por el momento electromagnético que transportaba la onda, este es denominado presión de radiación y viene dado por

$$pres_{rad} = \frac{F}{A} = c|\vec{g}|. \quad (7.95)$$

Capítulo 8

Ondas electromagnéticas

Supongamos que no existen fuentes $\rho = 0$ y $J = 0$ en un problema sin condiciones de contorno (en $\mathbb{R}^3$). En el caso de campos estáticos la solución era la trivial, sin embargo las ecuaciones de Maxwell, con sus dependencias temporales si soporta soluciones no triviales para el caso sin fuentes. ¿Cuál será la solución de un problema de condiciones iniciales?

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en el vacío se leen

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = 0 \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (8.4)$$

Para encontrar la ecuación que satisface la inducción magnética aplicamos la derivada temporal a (8.1) y luego reemplazamos $\partial_t \vec{E}$ de la segunda ecuación resultando en:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \partial_{tt}^2 \vec{B} = 0 \quad (8.5)$$

usando (8.3) se obtiene

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{B} = 0 \quad (8.6)$$

De la misma manera el campo eléctrico es gobernado por la ecuación:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{E} = 0 \quad (8.7)$$

Ambos campos son gobernados por la ecuación de ondas no dispersivas, el operador de ondas llamado de d'Alembert es:

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 = 0 \quad (8.8)$$

8.1 Ondas planas

Supongamos que los campos solo dependen de x y t luego las superficies de fase constante serán planos $y-z$. La ecuación para una dada componente del campo vectorial será

$$\partial_{tt}^2 f - c^2 \partial_{xx}^2 f = 0 \quad (8.9)$$

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)f = 0 \quad (8.10)$$

esto nos sugiere un cambio de variable:

$$\zeta = t - x/c \quad \eta = t + x/c \quad (8.11)$$

Las viejas variables vienen dadas por

$$t = 1/2(\zeta + \eta) \quad = (\eta - \zeta)c/2 \quad (8.12)$$

Teniendo en cuenta que las derivadas en (8.10) se expresan en función de las nuevas variables por

$$\partial_t = \partial_\zeta \partial_t \zeta + \partial_\eta \partial_t \eta = \partial_\zeta + \partial_\eta \quad (8.13)$$

Mientras la derivada en x resulta:

$$\partial_x = -\frac{1}{c}(\partial_\zeta + \partial_\eta) \quad (8.14)$$

[[Chequear signos de las dos expresiones de arriba]]
reemplazando en (8.10) se obtiene la ecuación:

$$\partial_{\zeta\eta}^2 f = 0 \quad (8.15)$$

La solución de esta ecuación diferencial es archiconocida, integramos primero en η obteniendose

$$\partial_\zeta f = F(\zeta) \quad (8.16)$$

es decir nos da una constante independiente de η , integramos nuevamente ahora en ζ ,

$$f = F_1(\zeta) + F_2(\eta) \quad (8.17)$$

es decir que la solución es igual a la suma de dos funciones totalmente arbitrarias una en la variable ζ y la otra en la variable η . Estas funciones quedan complementamente determinadas si se especifican las condiciones iniciales, en general se debe especificar el valor de la función y el valor de la derivada.

Si retornamos a las variables originales, la solución es:

$$f(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \quad (8.18)$$

es decir que la solución esta compuesta por dos funciones arbitrarias una que se mueve en función del tiempo hacia los x positivos (F_1) y la otra se mueve en la dirección negativa F_2 .

8.1.1 Características de las ondas electromagnéticas

Expresemos a la solución, i.e. las componentes del campo electromagnético, en el espacio de las frecuencias

$$(E_i, B_i) = \frac{1}{2\pi} \int (\hat{E}_i(\vec{x}, \omega), \hat{B}_i(\vec{x}, \omega)) e^{-i\omega t} d\omega \quad (8.19)$$

si reemplazamos esta solución propuesta en las ecuaciones de ondas para un medio lineal y uniforme en el cual ϵ y μ pueden depender de la frecuencia y ser complejos, se obtiene,

$$\nabla^2 \hat{E}_i + \mu\epsilon\omega^2 \hat{E}_i = 0 \quad (8.20)$$

$$\nabla^2 \hat{B}_i + \mu\epsilon\omega^2 \hat{B}_i = 0 \quad (8.21)$$

Proponemos, en el espacio físico una solución particular, una onda plana de número de onda $\vec{k}$,

$$E_i(\vec{x}, t) = E_{0i} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (8.22)$$

Luego si reemplazamos en la ecuación de ondas lo que obtenemos es una relación de dispersión,

$$-|\vec{k}|^2 + \mu\epsilon\omega^2 = 0 \quad (8.23)$$

esta ecuación nos dice que en el espacio de Fourier, hay una relación que se debe cumplir entre la frecuencia y el número de onda ω y $\vec{k}$. Esta relación es conocida por *relación de dispersión*. Si μ y ϵ son constantes independientes de ω y $\vec{k}$ entonces las ondas serán no-dispersivas y la velocidad de fase será una constante $v = (\epsilon\mu)^{-1/2}$.

El índice de refracción es el cociente entre la velocidad de la luz (la onda electromagnética) en el vacío sobre la velocidad en el medio

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \quad (8.24)$$

Por construcción la dirección de propagación de la fase de la onda será en la dirección $\vec{k}$, los planos de iso-fase tienen a $\vec{k}$ como normal al plano.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (8.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (8.26)$$

Es decir que la dirección de los campos eléctrico y magnético es transversal a la dirección de propagación, las ondas oscilan en un plano perpendicular al vector $\vec{k}$, por esta propiedad se denominan ondas transversales.

De las otras ecuaciones de Maxwell, $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$, deducimos que

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad (8.27)$$

es decir que $\vec{B}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares entre si y a su vez perpendiculares a $\vec{k}$. Si $\vec{k}$ es real entonces $\vec{B}$ y $\vec{E}$ tienen la misma fase.

La propagación del flujo de energía nos da

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (8.28)$$

$$= \frac{1}{2\mu\omega} |\vec{E}_0|^2 \vec{k} \quad (8.29)$$

La densidad de energía de una onda electromagnética en un medio viene dada por,

$$u = \frac{1}{4} (\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{B} \cdot \vec{H}^*) \quad (8.30)$$

teniendo en cuenta la relación entre los campos (8.27), en (8.30) es

$$u = \frac{1}{4} (\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu v^2} |\vec{E}_0|^2) = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}_0|^2 \quad (8.31)$$

esta es la densidad de energía promediada en el tiempo. Notar que con el uso de cantidades complejas y al conjugar estas cantidades nos esta dando una densidad de energía en el espacio que es un promedio espacial o temporal, de hecho para esta onda plana monocromática la densidad de energía es constante en todo el espacio. Para estudiar el transporte de energía electromagnética en las ondas deberíamos estudiar ondas que estan concentradas espacialmente en lugar de una onda monocromática, estas ondas concentradas espacialmente y/o temporalmente son denominadas paquetes ondulatorios o tren de ondas.

8.1.2 Cantidades complejas

Cuando trabajamos con cantidades complejas para representar a las ondas se debe recordar que esto es solo una representación para facilitar el tratamiento, pero que las cantidades físicas son reales, por lo que se debe tomar la parte de real de las cantidades:

$$Re(\psi) = \frac{1}{2} (\psi + \psi^*) \quad (8.32)$$

donde sumamos por el complejo conjugado de la cantidad y dividimos por dos para obtener la parte real.

En el caso que tengamos un producto y estamos trabajando con cantidades complejas, primero tenemos que tomar la parte real de cada cantidad y luego realizar el producto,

$$Re(\psi_1)Re(\psi_2) = \frac{1}{4} (\psi_1\psi_2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 + \psi_1^*\psi_2^*) \quad (8.33)$$

En el caso que estemos trabajando con cantidades cuadráticas como la energía ondulatoria en la cual queremos obtener un valor promediado temporalmente,

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f dt \quad (8.34)$$

entonces en el caso en que tengamos

$$(\psi_1, \psi_2) = (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)e^{-i\omega t} \quad (8.35)$$

el valor promedio del producto

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{4}(\overline{\psi_1\psi_2} + \overline{\psi_1\psi_2^*} + \overline{\psi_1^*\psi_2} + \overline{\psi_1^*\psi_2^*}) \quad (8.36)$$

pero la integración temporal de funciones que dependen harmonicamente de t da 0, $\overline{\psi_1\psi_2} = 0$, $\overline{\psi_1^*\psi_2^*} = 0$, por lo que resulta

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{4}(\overline{\psi_1\psi_2^*} + \overline{\psi_1^*\psi_2}) = \frac{1}{4}(\hat{\psi}_1\hat{\psi}_2^* + \hat{\psi}_1^*\hat{\psi}_2) \quad (8.37)$$

expresando las cantidades en componente real e imaginaria $\hat{\psi}_i = \hat{\psi}_i^R + i\hat{\psi}_i^I$, obtenemos,

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{2}(\hat{\psi}_1^R\hat{\psi}_2^R + \hat{\psi}_1^I\hat{\psi}_2^I) \quad (8.38)$$

entonces otra forma de expresar esto es por

$$\overline{Re(\psi_1)Re(\psi_2)} = \frac{1}{2}Re(\psi_1\psi_2^*) = \frac{1}{2}Re(\psi_1^*\psi_2) \quad (8.39)$$

8.2 Polarización de las ondas electromagnéticas

Nos vamos a enfocar en el plano perpendicular a la dirección de propagación para mirar que sucede con vector del campo eléctrico o magnético en ese plano. Asumamos una onda plana cuyas componentes vienen dadas por

$$E_y = \hat{E}_y \cos(\omega t - kx + \alpha_y) \quad (8.40)$$

$$E_z = \hat{E}_z \cos(\omega t - kx + \alpha_z) \quad (8.41)$$

donde $\hat{E}_y, \hat{E}_z$ son las amplitudes. Lo que representan estas ecuaciones es una onda que se propaga en la dirección x cuyas componentes vienen dadas en las direcciones perpendiculares, y, z .

Reescribo a E_z en función de los desfases pensando en una fase dada por $\omega t - kx + \alpha_z + \alpha_y - \alpha_y$,

$$E_z = \hat{E}_z [\cos(\omega t - kx + \alpha_y) \cos(\alpha_z - \alpha_y) - \sin(\omega t - kx + \alpha_y) \sin(\alpha_z - \alpha_y)] \quad (8.42)$$

llamemos a la fase $\psi = \omega t - kx$.

Luego elevando al cuadrado las dos componentes y sumando se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y}{\hat{E}_y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{\hat{E}_z}\right)^2 = & \cos^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2(\alpha_z - \alpha_y) \\ & - 2 \cos \psi \cos(\alpha_z - \alpha_y) \sin(\psi) \sin(\alpha_z - \alpha_y) \\ & + \sin^2 \psi \sin^2(\alpha_z - \alpha_y) \end{aligned} \quad (8.43)$$

Reescribiendo [[Comentar que cuenta hay que hacer para llegar a esto]]

$$\left(\frac{E_y}{\hat{E}_y}\right)^2 - 2\frac{E_y}{\hat{E}_y}\frac{E_z}{\hat{E}_z}\cos(\alpha_z - \alpha_y) + \left(\frac{E_z}{\hat{E}_z}\right)^2 = \sin^2(\alpha_z - \alpha_y) \quad (8.44)$$

esta es la ecuación general de una elipse. Es decir que en general tenemos polarización elíptica.

La polarización lineal se da cuando se tiene:

$$\vec{E} = (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2)e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (8.45)$$

donde en general $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ son dos versores en el plano perpendicular a la dirección de propagación y son perpendiculares entre sí y E_1 y E_2 tienen la misma fase, la dirección y el módulo vienen dados por

$$\theta = \tan^{-1}(E_2/E_1), \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \quad (8.46)$$

La polarización circular:

$$\vec{E} = E_0(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (8.47)$$

donde

Un ejemplo de polarización circular asumiendo componentes reales es

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \quad (8.48)$$

$$E_z = \pm E_0 \sin(\omega t - kx) \quad (8.49)$$

En general podemos expresar cualquier polarización en función de los versores:

$$\hat{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) \quad (8.50)$$

luego el campo se puede expresar por

$$\hat{E} = (E_+ \hat{e}_+ + E_- \hat{e}_-)e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (8.51)$$

$\hat{e}_+$ y $\hat{e}_-$ son llamados la base circular, ϵ_+ representa la rotación del vector en el sentido positivo mientras $\hat{e}_-$ en el sentido negativo.

Una forma general de expresar la polarización es a través de los parámetros de Stokes,

$$s_0 = |\hat{e}_1 \cdot \vec{E}|^2 + |\hat{e}_2 \cdot \vec{E}|^2 \quad (8.52)$$

esta es la intensidad

$$s_1 = |\hat{e}_1 \cdot \vec{E}|^2 - |\hat{e}_2 \cdot \vec{E}|^2 \quad (8.53)$$

esta es la polarización en $\hat{e}_1$ versus $\hat{e}_2$.

$$s_2 = 2\text{Re}[(\hat{e}_1 \cdot \vec{E})^*(\hat{e}_2 \cdot \vec{E})] \quad (8.54)$$

$$s_3 = 2\text{Im}[(\hat{e}_1 \cdot \vec{E})^*(\hat{e}_2 \cdot \vec{E})] \quad (8.55)$$

En general la luz natural no esta polarizada en este caso el campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E} = (E_1\hat{e}_1 \pm E_2e^{i\phi}\hat{e}_2)e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (8.56)$$

donde ϕ es una fase arbitraria.

8.3 Propagación de ondas: velocidad de grupo

Para el análisis que vamos a realizar a continuación nos vamos a concentrar en una de las componentes del campo eléctrico o magnético. La idea es demostrar las características básicas de la propagación de las ondas dispersivas; a través de la aproximación del tren de ondas demostraremos que las ondas se propagan con la denominada velocidad de grupo, por propagación nos estamos refiriendo a la propagación o transporte de energía o información realizada por la onda no al movimiento de la fase. La velocidad de grupo viene definida como el gradiente de la frecuencia en el espacio de números de onda.

En general hasta el momento hemos propuesto una solución particular de la ecuación de ondas y hemos estudiado las características de la solución en base a la solución particular. Si se quiere encontrar la solución general lo que debemos hacer es la superposición lineal de todas las soluciones linealmente independiente posibles. Veamos cual es la solución general de la ecuación de ondas, por el momento solo trabajaremos en 1D, asumiendo ondas planas en el plano perpendicular a k .

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de orden N y queremos resolver un problema de condiciones iniciales a través de la integral de Fourier. Para esto expresamos a la solución general en función de una suma en k ¹:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(k) \exp[i(\omega_n t - kx)] dk \quad (8.57)$$

donde ω_n son las n raíces de la relación de dispersión.

La ec. (8.57) nos dice que la solución general esta compuesta por todos los posibles números de onda, lo que estamos haciendo entonces es sumar la solución de ondas planas que habíamos obtenido para las ecuaciones de Maxwell.

Para determinar los $\hat{u}_n(k)$ es necesario imponer las condiciones iniciales.

¹Los problemas de condiciones iniciales es conveniente expresarlos como una integral en k , k variable independiente, mientras los de condiciones de contorno es conveniente tener a ω como variable independiente

Si la ecuación diferencial es de segundo orden representando ondas que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, y como datos conocemos:

$$u(x, 0) = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(k) \exp(ikx) dk, \quad (8.58)$$

$$\partial_t u(x, 0) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(k) \exp(ikx) dk, \quad (8.59)$$

donde $\hat{f}_1(k)$ y $\hat{f}_2(k)$ son las transformadas de Fourier de la condición inicial $f_1(x)$ y la derivada temporal en $t = 0$, $f_2(x)$.

Multiplicando por $\exp(ikx)$ e integrando en x a ambos lados de (8.58) y (8.59) y usando que $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx$ se obtiene

$$\hat{u}_1 = \frac{-i\hat{f}_2 - \omega_2 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad (8.60)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{i\hat{f}_2 - \omega_1 \hat{f}_1}{\omega_1 - \omega_2} \quad (8.61)$$

Asumiendo que $\omega_1 = \omega(k)$ y $\omega_2 = -\omega(k)$ resulta

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 - i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \quad (8.62)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 + i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \quad (8.63)$$

Luego la solución general para el caso de la ecuación de segundo orden con las condiciones iniciales arbitrarias f_1 y f_2 viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{2} \left(\hat{f}_1 - i \frac{\hat{f}_2}{\omega} \right) \exp[i(\omega_n t - kx)] dk \quad (8.64)$$

En lo que sigue por brevedad representamos a la solución por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{u}_1(k) \exp[i(\omega_1 t - kx)] dk \quad (8.65)$$

tenemos en cuenta solo uno de los términos de (8.57), las cuentas son equivalentes para el otro.

Aun cuando hemos encontrado a la solución general, esta expresión es bastante compleja y aun en casos simples no nos permite examinar las características básicas de la solución. A continuación realizaremos un procedimiento a partir de una aproximación, asumimos que el espectro de la solución, es decir $\hat{u}_1(k)$ o en su lugar $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$, se encuentran concentradas alrededor de k_0 ; es decir $\hat{u}_1(k)$ es un pico concentrado alrededor del

número de onda k_0 . En el espacio físico a esta condición se la puede visualizar como un tren de ondas cuyo número de onda es k_0 y tiene una envolvente que es lo suficientemente ancha como para que varios longitudes de onda quedan bien definidas, la envolvente larga establece en el espacio de números de onda la alta concentración alrededor de k_0 .

Hagamos un desarrollo de Taylor alrededor de k_0 para la relación de dispersión

$$\omega_1 = \omega(k_0) + \partial_k \omega(k_0)(k - k_0) + \dots \quad (8.66)$$

para esto asumimos que la relación de dispersión es una función “suave” alrededor de k_0 .

Si aplicamos el desarrollo de Talor, (8.66), en la integral de Fourier (8.65), para poder aplicar Taylor en la exponencial estamos asumiendo que $\hat{u}_1(k)$ esta concentrada en k_0 , por lo que las contribuciones significativas a la integral estan concentradas alrededor de k_0 y por ese motivo podemos aplicar la serie de Taylor ².

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(k) \exp[-i(k - k_0)(x - \partial_k \omega(k_0)t)] dk \quad (8.67)$$

Como estamos asumiendo que la transformada de Fourier de $\hat{u}_1$ (o $\hat{f}_1$) esta concentrada en k_0 la función puede ser escrita como $f_1(x) = A(x)e^{-ik_0 x}$ donde $A(x)$ es una función suave con transformada de Fourier concentrada en $k = 0$, mientras la $f_2 = 0$. Podemos pensar que $A(x) = A_0 \exp[-(x - x_0)^2/(2\sigma_x^2)]$ cuya transformada de Fourier es $\hat{A}(k) = A_0 \sigma_x \sqrt{2\pi} \exp(-\sigma_x^2 k^2/2)$.

Realizando un cambio de variables de $x' = x - \partial_k \omega(k_0)t$ y de $\tilde{k} = k - k_0$ en (8.68)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_1(\tilde{k} + k_0) \exp[-i\tilde{k}x'] d\tilde{k} \quad (8.68)$$

Luego deberíamos notar que la integral corresponde a la integral dada como condición inicial pero la trasladamos en el espacio de número de onda de tal manera que el número de onda principal este en el origen (en ese aso tendríamos que $\tilde{u}(k - k_0) = \hat{u}_1(k)$). Recordar que una transformada de una gaussiana centrada en $k = 0$ es una gaussiana mientras que una gaussiana centrada en $k = k_0$ es función periódica modulada por una gaussiana. Luego resulta que:

$$u(x, t) = A(x - \partial_k \omega(k_0)t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \quad (8.69)$$

es decir que si se cumplen condiciones de regularidad y el paquete esta lo suficientemente localizado en el espacio de número de onda, la propagación del paquete puede ser expresada como una envolvente que se mueve con la velocidad de grupo por una función periódica que contiene la información de la fase. De esta manera la envolvente conserva su forma a lo largo del movimiento para un dado k_0 fijo, esto es consecuencia de tomar solo el primer orden en la relación de dispersión y por lo tanto despreciar los efectos dispersivos que aparecen en los órdenes superiores.

²Como se relaciona esto al hecho que se pide que el paquete de ondas sea lo suficiente localizado en el espacio físico pero debe contener varias longitudes de onda?

La velocidad con que se mueve la envolvente del disturbio la llamamos velocidad de grupo y resulta que

$$c_g = \partial_k \omega. \quad (8.70)$$

Para que en la integral la frecuencia se pueda aproximar por los dos primeros términos del desarrollo de Taylor debe cumplirse que

$$\frac{\partial_t A}{A\omega(k_0)} \ll 1 \quad \frac{\partial_x A}{Ak_0} \ll 1. \quad (8.71)$$

Estas condiciones piden que la envolvente del disturbio cambie lentamente con respecto al periodo principal del disturbio, y lo mismo en el espacio, que las variaciones espaciales de la envolvente sean apreciables en distancias mucho mas largas que la longitud de onda central del disturbio.

8.4 Desparramamiento de un pulso cuando se propaga en un medio dispersivo

En este caso haremos una aproximación levemente superior a la del tren de ondas, en ciertos contextos es denominada haz gaussiano ya que se asume el campo inicialmente es una onda modulada por una gaussiana.

Supongamos tenemos un problema de valor inicial donde conocemos que

$$u(x, 0) = e^{-x^2/(2L^2)} \cos(k_0 x) \quad (8.72)$$

$$\partial_t u(x, 0) = 0 \quad (8.73)$$

es decir son dos pulsos que se propagan en direcciones distintas cuya derivada en $t = 0$ debido a estos dos pulsos opuestos se anula.

Nuevamente trabajaremos con un solo término de la solución, dado por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (8.74)$$

Teniendo en cuenta la condición inicial y notando que:

$$\cos(k_0 x) = \frac{1}{2}(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}) \quad (8.75)$$

luego la transformada de la condición inicial es:

$$\hat{u}(k) = \frac{L}{2} \left[e^{-L^2/2(k-k_0)^2} + e^{-L^2/2(k+k_0)^2} \right] \quad (8.76)$$

Asumimos que la relación de dispersión viene dada por (se podría generalizar a una expansión de Taylor de segundo orden)

$$\omega(k) = \omega_0 \left(1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right) \quad (8.77)$$

Tenemos que reemplazar (8.76) e integrar en forma exacta,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + ia^2\omega_0 L^{-2}t} \exp \left[-\frac{(x - \omega_0 a^2 k_0 t)^2}{2L^2(1 + i\omega_0 a^2 L^{-2}t)} \right] \quad (8.78)$$

$$\exp[i(-k_0 x + \omega_0(1 + a^2 k^2/2)t)] \quad (8.79)$$

entonces notar que la solución esta compuesta por dos términos exponenciales el último corresponde a una onda armónica con número de onda k_0 y frecuencia ω_0 , mientras el primero es una función error que se mueve con velocidad $a^2 k_0$ la cual debe notarse que corresponde a $c_g = \partial_k \omega_{k_0}$, sin embargo esta gaussiana esta cambiando su ancho con el tiempo, considerando solo la parte real vemos que el ancho de la gaussiana viene dado por

$$\sigma_x^2 = (L^2 + (a^2 k_0 t)^2)^{1/2} \quad (8.80)$$

es decir que inicialmente el ancho era L pero luego debido a que las distintas componentes espectrales que conforman el espectro se mueven con distintas velocidades esto provoca un desparramamiento, o estiramiento del ancho de la envolvente.

8.5 Ondas electromagnéticas en una interface

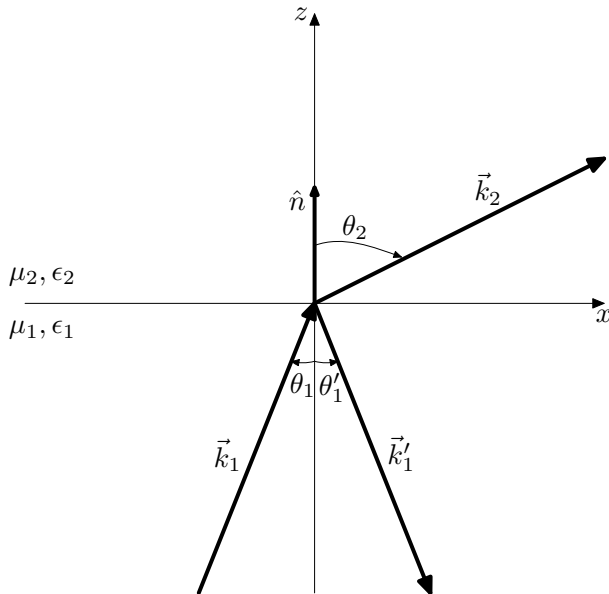


Figura 8.1: Onda electromagnética incidente $\vec{k}_1$ que se propaga en dos medios, la interface entre los medios a traves de las condiciones de contorno da lugar a una onda reflejada $\vec{k}'_1$ y a una onda refractada $\vec{k}_2$.

Supongamos que tenemos dos medios dieléctricos divididos por una interface que puede ser considerada plana, y existe un campo electromagnético que se propaga de un medio al otro. Cuales son los cambios que sufrirá el campo electromagnético, las ondas, con el cambio de medio. Este es un problema de condiciones de contorno en la interface entre

los medios dieléctricos con campos variables en el tiempo. Resolvemos la solución de las ecuaciones de Maxwell en cada medio y luego pegamos a estas soluciones a través de las condiciones de contorno.

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en cada medio son:
en el **medio 1** (onda incidente) se tiene:

$$\vec{E}_1^T = \vec{E}_1 + \vec{E}'_1 = \hat{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t)} + \hat{E}'_1 e^{i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (8.81)$$

por E_1^T interpretamos el campo eléctrico total en el medio 1 compuesto de la onda incidente y la reflejada.

Teniendo en cuenta que $\nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}$, se deduce que la inducción magnética viene dada por

$$\vec{B}_1^T = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_1^T = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \hat{k} \times \vec{E}_1^T. \quad (8.82)$$

En el **medio 2** asumimos como condición física que no hay onda entrante y solo tenemos la *onda refractada*, luego se tiene que

$$\vec{E}_2^T = \vec{E}_2 = \hat{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (8.83)$$

$$\vec{B}_2 = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \hat{k}' \times \vec{E}' \quad (8.84)$$

Dado que no hay dependencias temporales en las propiedades de los medios, estos solo tienen variaciones espaciales luego resulta que ω es constante, es decir la frecuencia de oscilación en el medio 1 es igual a la del medio 2, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

La única forma de tener soluciones no triviales es si las exponenciales tienen los mismos argumentos, notar que estas varían en la interface. En otras palabras, para que se cumplan las condiciones de contorno en todos los puntos de la interface, los argumentos de las exponenciales deben ser equivalentes para todo t y $\vec{x}$ (en la interface), de lo contrario $\hat{E}_1 = \hat{E}'_1 = \hat{E}_2 = 0$.

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t|_{\text{interface}} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{x} - \omega t|_{\text{interface}} = \vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t|_{\text{interface}} \quad (8.85)$$

como la frecuencia es la misma,

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{x}|_{\text{interface}} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{x}|_{\text{interface}} = \vec{k}_2 \cdot \vec{x}|_{\text{interface}} \quad (8.86)$$

Si tomamos la interface en $z = 0$ la componente del vector de número de onda $\vec{k}_1$ en el plano $z = 0$ es $k_1 \sin \theta_1$. Luego la igualdad nos dice que

$$k_1 \sin \theta_1 \cos \gamma_1 = k'_1 \sin \theta'_1 \cos \gamma'_1 = k_2 \sin \theta_2 \cos \gamma_2, \quad (8.87)$$

la única forma que se satisfaga la igualdad es que $\gamma_1 = \gamma'_1 = \gamma_2$, entonces los vectores $\vec{k}_1, \vec{k}'_1$ y $\vec{k}_2$ son coplanares. (En ese caso γ es el ángulo de $\vec{x}$ al del eje horizontal del plano donde se encuentran $\vec{k}_1, \vec{k}'_1$ y $\vec{k}_2$. Notar que $\cos \gamma = \cos(180 - \gamma)$). El plano donde se

encuentran $\vec{k}_1, \vec{k}'_1$ y $\vec{k}_2$ se denomina plano de incidencia y es el plano que forman $\vec{k}_1$ y $\hat{n}$ donde $\hat{n}$ es el versor normal a la superficie.

Además de (8.87) se cumple que

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (8.88)$$

como $|\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1|$, debido a que están en el mismo medio y vale que $|\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1| = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \omega$ entonces $\sin \theta_1 = \sin \theta'_1$ luego se tiene $\theta_1 = \theta'_1$.

Por otro lado de la segunda igualdad se encuentra la ley de refracción

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (8.89)$$

Notar que la componente $\vec{k}$ en el plano z es continua, la de la dirección z tiene un salto.

Como ω es constante se tiene que $v_1 k_1 = v_2 k_2$. Además sabemos que los índices de refracción $n_1 = \frac{c}{v_1}$, $n_2 = \frac{c}{v_2}$, luego resulta que

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (8.90)$$

Teniendo en cuenta esta relación entre los números de onda y de (8.89) se encuentra la ley de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (8.91)$$

Entonces a través de las condiciones de continuidad en el argumento de la exponencial hemos deducido las condiciones cinemáticas, el ángulo de reflexión y el ángulo de refracción.

Las condiciones de contorno en la interface deben ser deducidas de las ecuaciones variables en el tiempo, sin fuentes.

De $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ resulta entonces

$$\int \nabla \cdot \vec{D} dV = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (8.92)$$

De la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ entonces

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (8.93)$$

De la ecuación $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ resulta que

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} + \partial_t \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (8.94)$$

Usando el Teorema de Stokes y (8.93) se obtiene que

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (8.95)$$

De la misma manera integrando en superficie la ecuación $\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = 0$ luego

$$\int \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{s} - \partial_t \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (8.96)$$

luego resulta que

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (8.97)$$

Quedan las mismas condiciones de contorno que en el caso de los campos estáticos explícitamente

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (8.98)$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad (8.99)$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (8.100)$$

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel} \quad (8.101)$$

$$\epsilon_1(E_{1\perp} + E'_{1\perp}) - \epsilon_2 E_{2\perp} = 0 \quad (8.102)$$

$$(\vec{k}_1 \times \vec{E}_1)_\perp + (\vec{k}'_1 \times \vec{E}'_1)_\perp - (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)_\perp = 0 \quad (8.103)$$

$$E_{1\parallel} + E'_{1\parallel} - E_{2\parallel} = 0 \quad (8.104)$$

$$\frac{1}{\mu_1}(\vec{k}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{k}'_1 \times \vec{E}'_1)_\parallel - \frac{1}{\mu_2}(\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)_\parallel = 0 \quad (8.105)$$

Dado que para cualquier onda la podemos descomponer en dos ondas linealmente polarizadas en

$$\vec{E} = (E_{pe}\hat{e}_{pe} + E_{pa}\hat{e}_{pa})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \quad (8.106)$$

donde $\hat{e}_{pe}$ es un vector perpendicular al plano de incidencia (formado por $\vec{k}$ y $\hat{n}$) y $\hat{e}_{pa}$ yace en el plano de incidencia (NOTAR que no se relacionan con la $\parallel$ y $\perp$ de las condiciones de contorno las cuales se refieren al plano de la interface!).

8.5.1 Onda $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

[[Hace falta un grafico]]

Si el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia entonces es paralelo a la interface, $\vec{E}$ no tiene componentes perpendiculares a la interface (en la dirección de $\hat{n}$) por lo que de las condiciones de contorno

$$E_1 + E'_1 - E_2 = 0 \quad (8.107)$$

$$\frac{k_1}{\mu_1} \cos \theta (E_1 - E'_1) - \frac{1}{\mu_2} E_2 k_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (8.108)$$

Teniendo en cuenta que $k_1 = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\omega}$ y $k_2 = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\omega}$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_1 (E_1 - E'_1) - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (8.109)$$

Usando de (8.107) que $E'_1 = E_2 - E_1$ y reemplazando en (8.108) se obtiene

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2 \cos \theta_1 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2} \quad (8.110)$$

Usando la ley de Snell y trigonometría se obtiene

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} \quad (8.111)$$

de esta manera se deja todo en función del ángulo incidente. Luego reexpresando en función de los índices de refracción trivialmente se deducen los coeficientes de Fresnel,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{den} \quad (8.112)$$

donde $den = n_1 \cos \theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}$, mientras la amplitud de la onda reflejada viene dada por

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{den} \quad (8.113)$$

Si las frecuencias están en el rango del visible se puede asumir que $\mu_1/\mu_2 = 1$.

Ejercicio 8.1: Se deja como ejercicio el caso en que $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia, demostrar que los coeficientes de Fresnel resultantes en este caso son:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_1^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (8.114)$$

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_1}}{den} \quad (8.115)$$

Para incidencia normal $\theta_1 = 0$. Asumiendo inversión de la fase de la onda reflejada

$$E_1 - E'_1 - E_2 = 0 \quad (8.116)$$

$$n_1(E_1 + E'_1) - n_2 E_2 = 0 \quad (8.117)$$

Luego se tiene

$$E'_1 = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} E_1 \quad (8.118)$$

es decir que si $n_2 > n_1$ la fase de E'_1 se invierte con respecto a la de E_1 (mientras una componente apunta hacia adentro de la hoja, la otra apunta hacia afuera).

$$E_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_1 \quad (8.119)$$

dode se ha asumido que $\mu_1 = \mu_2$.

Para la polarización paralela al plano de incidencia (8.114) y (8.115) existe un ángulo para el cual no hay onda reflejada, si

$$n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} = 0 \quad (8.120)$$

$\mu_1 \approx \mu_2$, en este caso no hay reflexión es decir $E'_1 = 0$)

$$n_2^4 \cos^2 \theta_1 = n_1^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1) \quad (8.121)$$

$$n_2^4 \cos^2 \theta_1 = n_1^2 n_2^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) - n_1^4 \sin^2 \theta_1 \quad (8.122)$$

reagrupando se tiene que

$$(n_2^4 - n_1^2 n_2^2) \cos^2 \theta_1 = (n_1^2 n_2^2 - n_1^4) \sin^2 \theta_1 \quad (8.123)$$

Entonces para un cierto angulo dado por

$$\tan^2 \theta_1 = \frac{n_2^2}{n_1^2} \quad (8.124)$$

no existe componente reflejada y solo existe componente transmitida, este es denominado *el ángulo de Brewster*, esto solo se da para la componente paralela al plano de incidencia del campo eléctrico. En el caso en que existan ambas direccion de polarización la paralela y la perpendicular, entonces la onda reflejada solo tendrá componente perpendicular.

La reflexión interna total es el fenomeno inverso cuando no hay refracción y toda la onda es reflejada. Cuando $n_1 > n_2$ no hay onda refractada para ciertos angulos. Entonces el ángulo $\theta_1 < \theta_2$ y si comenzamos a aumentar θ_1 lo que sucederá es que en algun momento $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, esto se da para un angulo de incidencia critico de

$$\frac{n_2}{n_1} = \sin \theta_{1c} \quad (8.125)$$

Un ejemplo es agua-aire cuando estamos mirando dentro de la pileta.

Si seguimos aumentando el angulo de incidencia mas alla del angulo critico se tiene no habra onda refractada, sin embargo aparece una onda evanescente (que decae con la distancia a la interface). Esto se da porque el k en la direccion normal a la interface, $\hat{n}$, se vuelve complejo y por lo tanto la solucion es una exponencial real con exponente negativo.

8.6 Modelo físico de dispersión anómala

Supongamos un electrón con carga e^- y masa m confinado debido a una fuerza restauradora $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{x}$, inmerso en un campo eléctrico $\vec{E}$ y además existe una fuerza disipativa de constante γ , luego la ecuación de movimiento del electrón viene dada por

$$m(d_t^2 \vec{x} + \gamma d_t \vec{x} + \omega_0^2 \vec{x}) = -e\vec{E}(\vec{x}, t) \quad (8.126)$$

Supongamos que el campo eléctrico varía armónicamente en el tiempo: $\vec{E}(\vec{x}, t) = \hat{E}e^{i\omega t}$, luego la solución del problema se asume de la forma

$$\vec{x} = \hat{x}e^{i\omega t} \quad (8.127)$$

reemplazando en (8.126) obtenemos que

$$m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)\hat{x} = -e\hat{E} \quad (8.128)$$

El desplazamiento del electrón alrededor de la posición de equilibrio viene dado por

$$\hat{x} = -\frac{e}{m} \frac{\hat{E}}{(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} \quad (8.129)$$

Luego el momento dipolar del electrón es

$$\vec{p} = -e\vec{x} = \frac{e^2}{m}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)^{-1}\vec{E} \quad (8.130)$$

Si existen N moléculas por unidad de volumen con electrones de distintas frecuencias. La polarización es

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1}\vec{E} \quad (8.131)$$

Como la polarización es $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon/\epsilon_0 - 1)\vec{E}$, entonces

$$\epsilon_0(\epsilon/\epsilon_0 - 1) = \frac{Ne^2}{m} \sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \quad (8.132)$$

la permitividad viene dada por

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j f_j(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \quad (8.133)$$

En las cercanías de una frecuencia de oscilación la parte real de ϵ diverge mientras la parte imaginaria se hace grande.

Absorción resonante, la parte real pasa en forma abrupta de positiva a negativa y la absorción tiene un pico en la frecuencias resonantes.

8.7 Dispersión en medios-Causalidad

Sabemos que la relación entre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico en el espacio de las frecuencias es

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x}, \omega) \quad (8.134)$$

transformando (8.134) al espacio físico se tiene

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \epsilon(\omega) e^{-i\omega t} \int dt' e^{i\omega t'} \vec{E}(\vec{x}, t'). \quad (8.135)$$

Si tenemos en cuenta la transformada de Fourier de la susceptibilidad eléctrica:

$$\chi_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\chi}_e(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int (\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1) e^{-i\omega \tau} d\omega \quad (8.136)$$

Luego (8.135) en el espacio físico

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \int \chi_e(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau. \quad (8.137)$$

esta ecuación da una dependencia no-local temporalmente entre el $\vec{E}$ y el $\vec{D}$, los cambios de $\vec{E}$ anteriores y posteriores a t afectan al valor de $\vec{D}$ al tiempo t . Por cuestiones físicas es impensable que cambios en el futuro de $\vec{E}$ afecten al valor actual de $\vec{D}$, es decir que tenemos que imponer el principio de causalidad.

El principio de causalidad, entre el desplazamiento y el campo eléctrico, manifiesta que los efectos en $\vec{D}$ a cambios en $\vec{E}$ deben ser posteriores a los cambios que ocurren en $\vec{E}$. Para que se cumpla este principio se debe exigir que

$$\chi_e(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau < 0 \quad (8.138)$$

Además la función $\chi_e(\tau)$ es finita para todo valor de τ y tiende a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$. Físicamente el rango temporal en que la función $\chi_e(\tau)$ difiere de 0 es del orden del tiempo de relajación que caracteriza los procesos de polarización eléctrica.

Teniendo en cuenta la definición de χ_e , (8.136), si se integra τ positivos,

$$\int_0^\infty \chi_e(\tau) e^{i\omega' \tau} d\tau = (\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1) \delta(\omega' - \omega) \quad (8.139)$$

Luego se obtiene que

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \int_0^\infty \chi_e(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \right) \quad (8.140)$$

Dado que $\chi_e(\tau)$ es real, ya que $\vec{D}$ y $\vec{E}$ lo son, se tiene que $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$. La parte real e imaginaria satisfacen

$$\epsilon_R(-\omega) = \epsilon_R(\omega) \quad \epsilon_I(-\omega) = -\epsilon_I(\omega) \quad (8.141)$$

Entonces en un desarrollo de potencias de ϵ , ϵ_R tendrá potencias pares y ϵ_I potencias impares.

En el caso de conductores en el límite de bajas frecuencias se tiene

$$\epsilon(\omega) = i\sigma/\omega \quad (8.142)$$

$\epsilon(\omega)$ es una función analítica en la parte de arriba del plano de los números complejos. Realizando una integración por partes de (8.140)

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + i \frac{\chi_e(0)}{\omega} - \frac{\chi_e'(0)}{\omega^2} + \dots \quad (8.143)$$

donde $\chi_e(0) = 0$ ya que $\chi_e(0^-) = 0$.

8.7.1 Relación entre ϵ_R y ϵ_I . Kramers-Kronig

Dado que $\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ es analítica en la parte de arriba del plano podemos usar el teorema de Cauchy para encontrar una relación entre las partes reales e imaginarias de ϵ . El resultado de la integración es

$$\epsilon/\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (8.144)$$

En componentes esto resulta

$$Re(\epsilon/\epsilon_0) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im(\epsilon/\epsilon_0)}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (8.145)$$

$$Im(\epsilon/\epsilon_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re(\epsilon/\epsilon_0) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (8.146)$$

Estas son las conocidas relaciones de Kramer-Kronig. No podemos elegir ϵ_R y ϵ_I independientemente. En lo único que se basa la demostración en la causalidad y la analiticidad de ϵ .