

Electromagnetismo

Guía 1: Repaso de cálculo vectorial

9 de Marzo, 2016

Problema 1: Haciendo uso de las cantidades δ_{ij} (delta de Kronecker), ϵ_{ijk} (tensor de Levi-Civita) demostrar las siguientes identidades:

- (a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
- (b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
- (c) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$
- (d) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$
- (e) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
- (f) $\nabla \times (\phi \vec{A}) = \nabla \phi \times \vec{A} + \phi \nabla \times \vec{A}$
- (g) $\nabla(\phi \psi) = \psi \nabla \phi + \phi \nabla \psi$
- (h) $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi$
- (i) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$

Problema 2: Si $\vec{r}$ es el vector posición del punto (x, y, z) demuestre:

- (a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$
- (b) $\nabla \times \vec{r} = 0$
- (c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$
- (d) $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 0$
- (e) $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{k}) = \vec{k}$, donde $\vec{k} = \text{cons.}$

Problema 3: Demuestre las siguientes identidades integrales que son de uso frecuente en el electromagnetismo:

- (a) $\oint_S \phi \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V [\phi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla \phi] dV$
- (b) $\oint_S \phi d\vec{s} = \int_V \nabla \phi dV$ use un campo de la forma $\vec{F} = \phi(\vec{x})\vec{k}$ donde $\vec{k} = \text{cte}$
- (c) $\oint_S \vec{r} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V [\vec{r} \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}] dV$

- (d) $\oint_S \phi \nabla \psi \cdot d\vec{s} = \int_V [\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] dV$ conocida por 1ra. identidad de Green.
- (e) $\oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{s} = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV$ conocida por 2da. identidad de Green.

Problema 4: Demuestre las siguientes propiedades de la distribución delta:

- (a) La función $\delta(x)$ es par, $\delta(x) = \delta(-x)$
- (b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$
- (c) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{F(x_i)}{|g'(x_i)|}$ donde los x_i son los ceros de la función $g(x)$
- (d) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} dx = (-1)^n \frac{d^n F(x)}{dx^n} \Big|_{x=0} \quad n \geq 0$
- (e) Definiendo la función delta en $\mathbb{R}^3$ como $\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$. Demuestre que si $q_i = q_i(x, y, z)$ son coordenadas ortogonales entonces:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(q_1) \delta(q_2) \delta(q_3)$$

$$\text{donde } h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

Problema 5: Demuestre que:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$$

Problema 6: Utilizando la segunda identidad de Green demuestre que:

$$\phi(\vec{x}=0) = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla^2 \phi}{r} dV + \oint_S \left(\phi \partial_n (1/r) - \frac{\partial_n \phi}{r} \right) ds \right]$$

Problemas Complementarios

Problema C.1: Demuestre el siguiente teorema: “Dado un campo vectorial $\vec{B}$ tal que $\nabla \cdot \vec{B}$ sea una función acotada, continua, que admita las primeras derivadas parciales continuas en todo el espacio y tienda a cero como r^{-3} para $r \rightarrow \infty$, existe siempre la descomposición:

$$\vec{B} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A}$$

en un campo irrotacional y otro solenoidal.”

Problema C.2: Sean $q_i = q_i(x, y, z)$ las ecuaciones de coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias. Demuestre:

- (a) El diferencial de volumen $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ en donde $h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2$
- (b) El cuadrado del diferencial de longitud es: $dl^2 = \sum h_i^2 dq_i^2$
- (c) Las componentes del gradiente de una función ϕ valen $(\nabla \phi)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i}$

Problema C.3: *Distribuciones.* Una distribución esta definida como el límite de una sucesión regular $f_n(x)$ de funciones suaves. Sucesión regular es una sucesión de funciones suaves $f_n(x)$ tal que para cualquier función suave $F(x)$ existe el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f_n(x) dx$$

Demuestre que la sucesión $e^{-nx^2} (\frac{n}{\pi})^{1/2}$ define una distribución $\delta(x)$ tal que posee éstas propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(x) dx = F(0) \quad \text{y} \quad \delta(x) = 0, \forall x \neq 0$$

F@CENA © 2016