Electromagnetismo

Guía 3: Electrostática. Método de las imágenes

13 de Abril de 2016

Problema 1: Se lleva una carga puntual q a un punto situado a una distancia d de un plano conductor infinito mantenido a potencial cero. Utilizando el método de las imágenes halle:

(a) Encontrar la solución general Φ.

(b) Encontrar la funcion de Green. Comprobar qaue realmente satisface las condiciones de contorno.

(c) La densidad superficial de carga inducida en el plano y represéntela.

(d) La fuerza entre el plano y la carga mediante la ley de Coulomb aplicada a la fuerza entre la carga y su imagen.

(e) La fuerza total que actúa sobre el plano obtenida por integración.

(f) El trabajo necesario para llevar la carga q desde su posición hasta el infinito.

Problema 2: Encontrar el potencial electrostático $\Phi(x, y)$ acotado en el espacio $y > 0$ limitado por un plano conductor infinito en $y = 0$. Este plano está dividido en una franja $(-a < x < a)$ a potencial $\Phi = V$ y el resto (aislado eléctricamente de la franja) a potencial $\Phi = 0$. Comprobar que esa función satisface las condiciones de contorno.

Problema 3: Considere un problema de potencial en el semiespacio definido por $z > 0$, con condiciones de contorno de Dirichlet sobre el plano $z = 0$ (y en el infinito).

(a) Escriba la función de Green apropiada.

(b) Si el potencial sobre el plano $z = 0$ se especifica por $\Phi = V$ dentro de un círculo, halle una expresión integral para el potencial en el punto p dado en trminos de coordenadas (ρ, ϕ, z)

(c) Muestre que a lo largo del eje del círculo el potencial está dado por

$$\Phi = V\left[1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}}\right]$$

(d) Muestre que a grandes distancias $(\rho^2 + z^2 \gg a^2)$ el potencial puede ser expandido en serie de $(\rho^2 + z^2)^{-1}$ y que los términos principales del desarrollo son:

$$\Phi = \frac{Va^2}{2}\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \cdots\right]$$

Verifique que los resultados de (c) y (d) son consistentes entre sí dentro de su rango de validez.

Problema 4: Sea una esfera hueca conductora de radio a conectada a tierra. A una distancia $b > a$ del centro de la misma se coloca una carga q. Determinar:

(a) El potencial en todo el espacio.

(b) La densidad potencial de carga y la carga total inducida sobre la misma.¿Es de esperar este resultado?

(c) La fuerza total sobre la carga.

Problema 5: Considere una esfera conductora de radio a inmersa en un campo eléctrico uniforme E_0. A los efectos de generar un campo eléctrico uniforme se puede utilizar dos cargas puntuales de cargas opuestas que se encuentran alejadas infinitamente.

(a) Usando el método de las imágenes determine el potencial externo a la esfera.

(b) Encuentre la densidad de carga superficial inducida en la esfera.

Problema 6: Las paredes de un cubo hueco conductor están definidas por los seis planos $x = y = z = 0$ y $x = y = z = a$. Las paredes se mantienen a potencial cero excepto las de $z = 0$ y $z = a$ que se mantienen a V constante (condiciones de contorno de Dirichlet).

(a) Hállese el potencial $\phi(x, y, z)$ en un punto cualquiera interior al cubo.

(b) Calcule numéricamente el potencial en el centro del cubo, con un grado de precisión de tres cifras significativas. ¿Cuántos términos de la serie son necesarios para obtener ese grado de exactitud? Compare los resultados numéricos con el valor medio del potencial sobre las paredes.

(c) Halle la densidad superficial de carga sobre la superficie $z = a$.

Problema 7: La solución general de la ecuación de Laplace para el problema de potencial bidimensional, utilizando coordenadas polares, viene dada por:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \sin(n\phi + \phi_n)$$

(a) Partiendo de esta expresión, calcule los coeficientes para el caso en el que se especifica el potencial sobre la superficie de un cilindro de radio b.

(b) Sustituya los coeficientes en la serie y sume ésta para obtener el potencial en el interior del cilindro en forma de una integral de Poisson:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} \mathrm{d}\phi'$$

(c) ¿Qué modificación sería necesaria si se desea el potencial en la región del espacio comprendida entre el cilindro y el infinito?