

Electromagnetismo

Guía 5: Electrostática. Desarrollos multipolares

4 de Mayo de 2016

Problema 1: Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las siguientes distribuciones de carga:

- (a) dos cargas q : una en $(a, 0, 0)$ y la otra en $(0, a, 0)$ y dos cargas $-q$ en $(-a, 0, 0)$ y en $(0, -a, 0)$.
- (b) dos cargas q : una en $(0, 0, a)$ y la otra en $(0, 0, -a)$ y una carga $-2q$ en el origen.
- (c) un disco de radio a , centrado en el origen, sobre el plano x-y, con una carga q distribuida uniformemente.

Trate de obtener resultados, para los momentos no nulos, válidos para todo l pero en cada caso encuentre al menos los dos primeros conjuntos de momentos no nulos.

- (i) Para la distribución de carga (b) escriba el desarrollo multipolar para el potencial. Manteniendo sólo el término de orden mas bajo en la expansión, dibuje el potencial en el plano x-y como función de la distancia al origen para distancias mayores que a .
- (ii) Calcule directamente, a partir de la ley de Coulomb el potencial exacto para b) en el plano x-y. Dibuje, como función de la distancia al origen, el potencial y compare con el resultado obtenido en el punto anterior.
- (iii) Estudie la forma asintótica en los puntos anteriores para ver claramente el comportamiento a grandes distancias.

Problema 2: Una densidad localizada de carga $\rho(x, y, z)$ está ubicada en un campo electrostático externo descrito por un potencial $\Phi(x, y, z)$ que varía suavemente en la región donde ρ es distinta de cero.

A partir de primeros principios calcular la fuerza total actuante sobre la distribución de cargas como un desarrollo de momentos multipolares hasta el término cuadrupolar. Muestre que la fuerza es:

$$\vec{F} = q\vec{E}^{(0)}(0) + \{\nabla[\vec{p} \cdot \vec{E}^{(0)}(\vec{x})]\}_0 + \left\{ \nabla \left[\frac{1}{6} \sum_{j,k} Q_{jk} \frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_k}(\vec{x}) \right] \right\}_0 + \dots$$

Compare ésta con la expansión de la energía de los momentos multipolares. ¿Cuál es la conexión entre éstas expresiones?

Problema 3: Un núcleo de momento cuadrupolar Q , que se encuentra en un campo eléctrico de simetría cilíndrica con un gradiente en la dirección del eje z en la posición ocupada por el núcleo.

- (a) Demuestre que la energía de interacción cuadrupolar es:

$$W = -\frac{e}{4}Q(\partial_z E_z)_0$$

donde $Q = Q_{33}/e$ (notación de Jackson)

- (b) Las distribuciones de carga nuclear pueden aproximarse mediante una densidad de carga constante que ocupa un volumen esferoidal de semieje mayor a y semieje menor b . Calcule el momento cuadrupolar de dicho núcleo suponiendo que la carga total es Ze .
- (c) Sabiendo que el Eu^{153} ; ($Z = 63$) tiene un momento cuadrupolar $Q = 2.5 \cdot 10^{-24} \text{cm}^2$ y radio medio $R = \frac{a+b}{2} = 7 \cdot 10^{-13} \text{cm}$ calcule la diferencia relativa entre los radios $\frac{a-b}{R}$.

Problema 4: Se tiene una distribución localizada de carga cuya densidad es:

$$\rho(r) = \frac{1}{64\pi} r^2 \exp(-r) \sin^2 \theta$$

- (a) Obtenga un desarrollo en multipolos del potencial debido a ésta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares no nulos. Exprese el potencial a distancias grandes como un desarrollo finito en polinomios de Legendre.
- (b) Determine explícitamente el potencial en un punto cualquiera del espacio y demuestre que cerca del origen del sistema se tiene:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{r^2}{120} \right) P_2(\cos \theta) \right]$$

- (c) Si en el origen existe un núcleo de momento cuadrupolar $Q = 10^{-24} \text{cm}^2$ determine la magnitud de la energía de interacción suponiendo que la unidad de carga en $\rho(r)$ es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr para el hidrógeno, $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{cm}$. Exprese el resultado como una frecuencia dividiendo por la constante de Planck.

F@CENA © 2016