Electromagnetismo

Guía 8: Campos variables en el tiempo. Cuasiestacionario.

3 de Junio de 2016

Problema 1: La solución de la ecuación de ondas en 3D para un punto fuente en espacio y en tiempo es un disturbio esférico de radio $R = ct$. En 1 y 2 dimensiones el disturbio tiene una estela aun cuando la fuente es un punto en el espacio y en el tiempo. Las soluciones para dimensiones menores pueden ser encontradas por la superposicion de las dimensiones superfluas.

(a) Partiendo de la solución retardada de la ecuación de ondas 3D, muestre que la fuente $f(\vec{x}', t') = \delta(x')\delta(y')\delta(t')$, equivalente a una fuente puntual en $t = 0$ y en el origen en un espacio de dos dimensiones, producirá la onda:

$$\Psi(x, y, t) = \frac{2c\Theta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}$$

donde Θ es la función de Heaviside.

(b) Muestre que una fuente laminar, equivalente a una fuente puntual en el origen en un espacio de una dimensión produce una onda 1D de la forma:

$$\Psi(x, t) = 2\pi c\Theta(ct - |x|)$$

Problema 2: Encuentre la ecuación diferencial que satisface el potencial vector en un medio cuya corriente viene dada por la ley de Ohm ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$) y la densidad de cargas es nula, asuma la aproximación de campos quasi-estáticos. Demuestre que en dicha aproximación es posible despreciar el término de la corriente de desplazamiento. La ecuación resultante es la ecuación de difusión homogenea:

$$\nabla^2\vec{A} = \mu\sigma\partial_t\vec{A}$$

en un medio conductor de conductividad eléctrica σ, en un problema sin condiciones de frontera, tiene una solución al problema de valor inicial de la forma:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int G(\vec{x} - \vec{x}', t)A(\vec{x}', 0)\mathrm{d}V'$$

donde $\vec{A}(\vec{x}', 0)$ es el vector potencial inicial y G es un núcleo apropiado.

(a) Encuentre la solución al problema de valor inicial utilizando la transformada de Fourier 3D en el espacio para $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Muestre que la función de Green para $t > 0$ tiene la representación de Fourier:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-k^2t/\mu\sigma}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}m$$

(b) Muestre que $G(\vec{x}-\vec{x}', t)$ es la función de Green de difusión que satisface la ecuación:

$$\partial_t G - \frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2 G = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t)$$

(c) Muestre que si σ es uniforme en todo el espacio la función de Green es

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', 0) = \Theta(t)\left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-\mu\sigma|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{4t}\right)$$

(d) Suponga que a tiempo $t' = 0$, el potencial vector inicial $\vec{A}(\vec{x}', 0)$ es no nulo en una región localizada de extensión lineal d alrededor del origen. La dependencia temporal es observada en un punto P lejos del origen ($r \gg d$). Muestre que hay tres regímenes de tiempo entre 0 y T_1 entre T_1 y T_2 y para tiempos mayores a T_2. Muestre que para tiempos largos, el vector potencial es proporcional a la integral de volumen de $\vec{A}(\vec{x}', 0)$ por $t^{-3/2}$.

Problema 3: Un capacitor de planos-paralelos circulares de radio a y separación $d \ll a$ esta conectado a un fuente de corriente por medio de un cable axial. La corriente en el cable es $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

(a) Calcule los campos magnéticos y eléctricos entre los platos en potencias de la frecuencia hasta el segundo orden. Desprecie los efectos de borde.

(b) Calcule las integrales de volúmenes de w_e y w_m que definen la reactancia.

Problema 4: Una onda plana transversa es incidente normalmente en vacío sobre una superficie plana perfectamente absorbente.

(a) Usando la ley de conservación del momento lineal, muestre que la presión de radiación ejercida sobre la pantalla es igual a la energía del campo por unidad de volumen.

(b) En el entorno de la tierra el flujo de energía electromagnética del sol es aproximadamente $1.4kW/m^2$. Si un velero interplanetario tuviera una vela de $1g/m^2$, ¿cúal sería la aceleración debida a la presión por la radiación solar? ¿Qué relación tiene la presión de radiación con la aceleración debida al viento solar?

Problema 5: Un condensador está formado por dos placas circulares de radio a separadas por una distancia h mucho menor que a. Entre las placas hay vacio. El condensador está conectado a un circuito por el que circula una corriente $I = I_0 \sin(\omega t)$. Calcule los campos eléctrico y magnético entre las placas del mismo, despreciando los efectos de borde. (Nota: En la aproximacion quasi-estacionaria, al efectuar el desarrollo en potencias de ω, la serie es convergente y puede relacionarse con las funciones de Bessel).

Problema 6: Por un conductor cilíndrico macizo de radio a y conductividad σ, que puede considerarse de longitud infinita, circula una corriente alterna de tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. Bajo la aproximación cuasiestacionaria, calcule: ($\mu = \epsilon = 1$)

(a) Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en el interior del conductor.

(b) La densidad de corriente $\vec{J}$ y el promedio temporal de la potencia disipada por efecto Joule, por unidad de longitud.

(c) Estudie cualitativamente los casos límites de la distribución de $\vec{J}$ cuando $\delta/a \gg 1$ y $\delta/a \ll 1$, donde δ es el espesor pelicular ($\delta = \sqrt{2/(\mu\sigma\omega)}$).