

# LA INESTABILIDAD CONVECTIVA EN ONDAS DE GRAVEDAD TRANSITORIAS

Manuel Pulido y Claudio Rodas

Grupo de Investigación en Ciencias Atmosféricas

FACENA, Universidad Nacional del Nordeste

Campus Universitario, (3400) Corrientes, Argentina.

E-mail: pulido@exa.unne.edu.ar

## Resumen

En este trabajo se presentan simulaciones de la evolución de ondas de gravedad transitorias que se propagan hacia la región crítica. Las ondas son representadas a través de un modelo numérico lineal con alta resolución vertical ( $5m$ ). Se muestra que paquetes altamente transitorios no alcanzan el umbral de inestabilidad convectiva para tiempos largos ( $t = 48 hr$ ), en contraste con el conocido caso de ondas estáticas. En general, se observa que la amplitud de los paquetes transitorios disminuye durante su propagación hacia la región crítica. Las simulaciones en alta resolución, en comparación con experimentos de baja resolución, demuestran que los modelos dinámicos de baja resolución sobreestiman la amplitud de los modos más altos durante su propagación hacia el nivel crítico.

We present simulations of the evolution of transient gravity waves that are propagating towards the critical region. The waves are simulated by means of a linear numerical model with high vertical resolution ( $5m$ ). The highly transient wave packets do not reach the convective instability threshold even for very long times ( $48hr$ ), in contrast with steady-state waves. The amplitude of the wave packet envelope decreases during its propagation towards the critical region. The simulations in high resolution, in comparison with low resolution experiments, show that low resolution simulations overestimate the amplitude of high wavenumber modes during their propagation towards the critical level.

## 1 Introducción

Las ondas de gravedad tienen un importante rol en la circulación media global. Transportan energía y momento, contribuyen a la turbulencia y al mezclado, influenciando la circulación media y la estructura térmica de la media atmósfera (para una revisión ver Fritts and Alexander 2003).

Las ondas de gravedad son generadas principalmente en la tropósfera y luego se propagan hacia arriba. Durante su propagación, las ondas interactúan con el flujo medio, produciéndose un intercambio de energía entre el flujo medio y el sistema ondulatorio.

Este intercambio de energía está gobernado por el principio de conservación de la acción ondulatoria (Andrews and McIntyre, 1978). Cuando la onda se propaga hacia el nivel crítico es conocido que la energía de la onda es totalmente absorbida en la capa crítica (Booker and Bretherton, 1967), es decir, deben existir procesos físicos que disipen o “depositen” el flujo de momento y la energía transportados por la onda.

En el caso de una onda monocromática o de un disturbio estático (aquel generado por fuentes permanentes), la amplitud de las perturbaciones de la velocidad horizontal y de la temperatura divergen a la altura del nivel crítico. Por lo tanto, la onda tiene el nivel de inestabilidad convectiva antes de arribar al nivel crítico. En general es ampliamente aceptado que la onda disipa su energía a través de turbulencia en la región comprendida entre el nivel de inestabilidad convectiva y el nivel crítico (Fritts 1984).

Por otro lado, las ondas de gravedad generadas por un disturbio transitorio tienen una distribución en velocidades de fase. En este caso no está bien definido el nivel crítico, sino que existe lo que podríamos denominar una región crítica, es decir un rango de alturas para el cual cada componente del disturbio encuentra su propio nivel crítico. Sin embargo la energía involucrada en la interacción de cada modo es infinitesimal. Recientemente, Pulido (2002) demostró que en el caso de disturbios transitorios existe una fuerte interferencia destructiva en las cercanías de la región crítica, en la cual la amplitud de la perturbación en la velocidad horizontal tiende a cero, en contraste con el caso monocromático donde la amplitud diverge. Esta interferencia destructiva conlleva a diferencias cualitativas en el espectro: mientras el espectro de una onda monocromática que ha sufrido corrimiento Doppler tiene una ley de potencias de  $-1$ , el caso de un disturbio transitorio tiene una ley de potencias de  $-3$ , producto de esta interferencia “selectiva” (Pulido, 2005).

Debido a esta interferencia destructiva, no está claro qué procesos físicos dominan el rompimiento de las ondas transitorias, dado que las amplitudes en juego en las cercanías del nivel crítico son muy inferiores al caso monocromático. Estos hechos sugieren que, en estos casos, la disipación por turbulencia podría tener un rol secundario y la disipación por difusión un rol más preponderante que en el caso monocromático.

En este trabajo, utilizamos un modelo lineal para estudiar la propagación de disturbios transitorios, representados a través de paquetes gaussianos, a los efectos de estudiar la evolución de la energía y la amplitud máxima de la envolvente, para establecer la altura en que el disturbio se vuelve inestable convectivamente.

En este estudio preliminar utilizamos un modelo lineal que nos permite modelar el disturbio con una muy alta resolución vertical ( $5m$ ) y así obtener resultados en el límite de altos números de onda verticales, lo que hoy resulta imposible con modelos no-lineales. Sin embargo, debido a la hipótesis de linealidad, el modelo solo nos permite estudiar realísticamente el disturbio hasta la condición de inestabilidad convectiva y en rangos de tiempo en los cuales la disipación puede ser despreciada. En un estudio posterior esperamos confrontar estos resultados con los obtenidos mediante la utilización de un modelo dinámico no-lineal.

## 2 Modelado de las ondas

### 2.1 Solución de la ecuación de ondas de gravedad

Consideramos perturbaciones adiabáticas lineales en una atmósfera que no rota, constituida de un fluido no viscoso, donde las condiciones básicas están dadas por una frecuencia constante de flotación  $N_0$  y un viento horizontal  $U(z)$ , donde  $z$  es la altura. Bajo la aproximación Boussinesq, la ecuación resultante para la perturbación de la velocidad vertical  $w$  es (Booker and Bretherton 1967)

$$D_{tt}\nabla^2 w - d_{zz}U D_t \partial_x w + N_0^2 \partial_{xx} w = 0 \quad (1)$$

donde  $D_t = (\partial_t + U\partial_x)$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $d_z = d/dz$ . El subíndice doble denota doble derivación.

Como  $U$  es uniforme en  $x$  y  $t$ , escribimos la solución de (1) en la forma

$$w(x, z, t) = w_1(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia referida a tierra y  $k$  es el número de onda horizontal. Sustituyendo (2) en (1), obtenemos la conocida ecuación de Taylor-Goldstein:

$$d_{zz}w_1 + \left\{ \frac{N_0^2 k^2}{(\omega - kU)^2} + \frac{d_{zz}U k}{\omega - kU} - k^2 \right\} w_1 = 0 \quad (3)$$

Las condiciones de contorno de la atmósfera, al no tener un límite superior, permiten modos continuos. Entonces, la solución general de (1) es obtenida a través de una integral doble de Fourier en  $\omega$  y  $k$ :

$$w(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int \tilde{w}(k, \omega, z) e^{i(\omega t - kx)} dk d\omega \quad (4)$$

donde  $\tilde{w}(k, \omega, z)$  es la solución de (3) para  $\omega$  y  $k$  particulares.

A partir de la ecuación de conservación de la masa ( $\partial_z w + \partial_x u = 0$ ) y de (4) obtenemos la perturbación de la velocidad horizontal:

$$u(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int \tilde{u}(k, \omega, z) e^{i(\omega t - kx)} dk d\omega \quad (5)$$

donde  $ik\tilde{u}(k, \omega, z) = \partial_z \tilde{w}(k, \omega, z)$ . Asumiendo que  $\tilde{w}(k, \omega, z)$  es conocida, observamos que podemos conocer las velocidades vertical y horizontal de la perturbación en cualquier lugar y tiempo.

### 2.2 Modelo Numérico

El modelo numérico obtiene  $w(x, z, t)$  y  $u(x, z, t)$  usando el método espectral en  $x$  y  $t$  en las ecuaciones (4) y (5). Tanto  $\tilde{w}(k, \omega, z)$  como  $\tilde{u}(k, \omega, z)$  son obtenidas resolviendo numéricamente la ecuación (3). Esta ecuación (3) es representada por dos ecuaciones de primer orden que son resueltas usando un método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso adaptativo (Press et al. 1992).

Pulido (2005) obtiene la potencia espectral de la perturbación como función del número de onda vertical y encuentra que la potencia espectral en  $z = 0$  es

$$|F_0(m_0)|^2 = \frac{N_0^2}{m_0^4} \int k^2 |\tilde{u}(k, \omega(m_0))|^2 dk \quad (6)$$

donde  $m_0$  es el número de onda vertical en  $z = 0$ ,  $\tilde{u}(k, \omega(m_0)) = \tilde{u}(k, \omega, 0)$  y  $F_0(m_0)$  es el espectro de la fuente. Como asumimos que el disturbio es periódico en  $x$ , con número de onda  $k_0$ , de (6) obtenemos

$$|\tilde{u}(k, \omega, 0)| = \frac{m_0^2}{k_0 N_0} |F_0(m_0)| \quad (7)$$

### 2.3 Diseño de los experimentos

En este trabajo consideramos una fuente de ondas de gravedad que está localizada en  $z = 0$  y radía un espectro Gaussiano dado por

$$F_0(m_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(m_0 - m_{0m})^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

donde  $m_0$  el número de onda vertical en  $z = 0$ ,  $m_{0m}$  es el número de onda central y  $\sigma$  es el ancho del espectro. Podemos pensar así que tenemos una membrana localizada en el plano horizontal  $z = 0$  (frontera inferior), la cual está vibrando y generando perturbaciones. Un ejemplo de las velocidades horizontal y vertical en  $z = 0$  generadas por esta distribución e impuesta como condición de contorno es mostrado en Fig. 1.

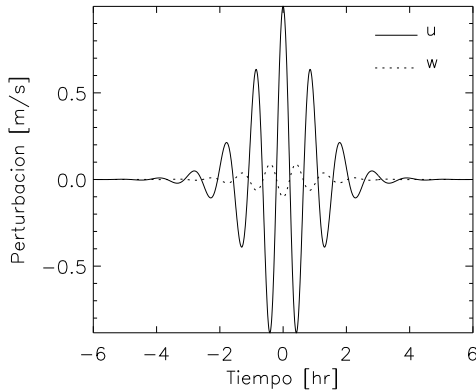


Figura 1: Forzado ondulatorio en  $z = 0$ : velocidad de la perturbación horizontal (línea sólida) y de la vertical (línea punteada).

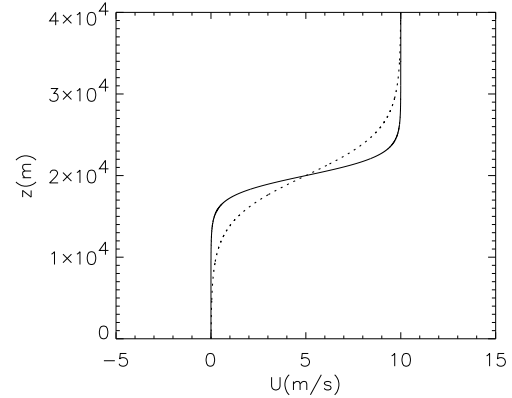


Figura 2: Perfil vertical del viento medio para  $Ri = 100$  (línea sólida) y  $Ri = 500$  (línea punteada).

En la frontera superior  $z = 35km$ , imponemos la condición de radiación ya que esperamos solo ondas ascendentes.

Una vez que el disturbio comienza a ser radiado desde la fuente a partir de  $t = 0$ , este se propaga hacia arriba en un medio que está caracterizado por una frecuencia de Brunt-Väisälä constante ( $N_0$ ) y un viento del medio de la forma

$$U(z) = \frac{U_m}{2} [1 + \tanh\{\Gamma(z - z_s)\}] \quad (9)$$

donde  $z_s$  es el punto de inflexión,  $U_m$  es la máxima velocidad del viento medio y  $\Gamma = 2N_0/(U_m\sqrt{Ri})$ .

El número de Richardson del medio ( $Ri$ ) está definido como  $Ri \equiv \frac{N_0^2}{d_z U^2}$  y es una medida de la inestabilidad del medio. A mayor  $Ri$ , más estable es el medio. Se considera que para  $Ri > 0.25$  el medio es estable.

El valor de la frecuencia de Brunt-Väisälä utilizado es de  $N_0 = 0.02s^{-1}$ , representativo de la estratósfera. En cuanto al viento de corte  $U(z)$ , también se tomaron valores representativos de la atmósfera media. En particular los experimentos fueron realizados con números de Richardson altos, específicamente  $Ri = 100$  y  $Ri = 500$ . En la Fig. 2 mostramos perfiles de viento medio para estos valores de Richardson. El perfil de viento (9) permite estudiar la interacción entre el flujo medio y el campo ondulatorio cuando este se propaga hacia la región crítica que se encuentra alrededor del punto de inflexión  $z_s$ . Notar que en la región crítica el viento es aproximadamente lineal.

Dado que queremos analizar el comportamiento del paquete en las cercanías del nivel crítico, los modos principales del paquete tienen la velocidad de fase horizontal menor al máximo valor que puede alcanzar el viento medio, de esta manera los modos más importantes del paquete alcanzan su nivel crítico. La elección de  $m_{0m} = 4N_0/3U_m$  permite lo anterior, aún para las perturbaciones más transitorias tratadas en este trabajo. Con estos valores en mente, la longitud de onda principal será  $\lambda_{0m} = 2.36km$ .

Los experimentos numéricos fueron llevados a cabo con un límite inferior a  $z = -3\sigma^{-1}$  tal que podemos examinar todo el pulso a  $t = 0$  y un límite superior en  $z = 35km$ .

Los números de ondas verticales iniciales que utilizamos en el modelo estuvieron siempre dentro del rango  $[0, 0.5m_{0m}, 1.95m_{0m}]$ . Suponemos que una oscilación está bien definida si al menos contiene 5 puntos de grilla. De esta manera nuestro modelo no puede resolver longitudes de onda menores a  $5\Delta z$  (donde  $\Delta z$  es la resolución espacial en altura del modelo). Inicialmente en el paquete, con las resoluciones que se utilizaron, no están presentes longitudes de onda tan chicas, pero al ir evolucionando comienzan a aparecer modos con longitud de onda menor a  $5\Delta z$ , los cuales son eliminados por nuestro modelo ya que no puede resolverlos. En Fig. 3 se ilustra el tiempo en que los modos  $m_* = \frac{m_0}{m_{0m}}$  que superan este umbral son eliminados del modelo para el caso límite de  $Ri = 10$  y un caso típico  $Ri = 100$ .

En la Fig. 4 se presenta la evolución de la velocidad horizontal para tres resoluciones distintas. Existen fuertes diferencias a tiempos largos en la amplitud dependiendo de la resolución que se utilice. Es notorio como se marcan las diferencias a medida que evoluciona la perturbación. Estas diferencias se producen debido a falta de interferencia entre modos en los casos de baja resolución, en particular se observa que para tiempos largos hay una sobreestimación de la amplitud.

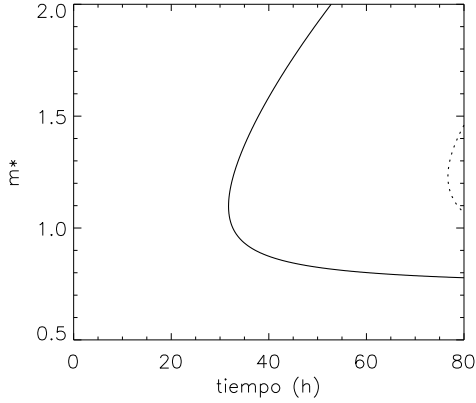


Figura 3: Las curvas representan el instante en que el modo que evolucionó desde  $m_* = \frac{m_0}{m_{0m}}$  alcanzó el máximo modo resoluble por el modelo,  $Ri = 10$  (línea sólida) y  $Ri = 100$  (línea a trazos).

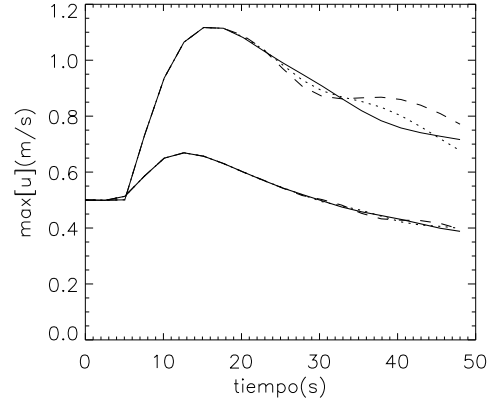


Figura 4: Evolución de la perturbación horizontal para diferentes resoluciones espaciales:  $\Delta z = 2m$  (línea sólida),  $\Delta z = 5m$  (línea punteada),  $\Delta z = 10m$  (línea a trazos); para  $Ri = 100$  y  $\sigma = 0.04m_{0m}$  (línea fina) y para  $Ri = 500$  y  $\sigma = 0.07m_{0m}$  (línea gruesa)

### 3 Resultados

En la Fig. 5 se muestran el perfil vertical de una perturbación horizontal de ancho espacial  $\sigma = 0.13m_{0m}$  a tiempo inicial ( $t = 0$ ) y el perfil vertical de la misma perturbación a un tiempo posterior ( $t = 10hr$ ), para un medio con  $Ri = 100$ . A medida que se acerca al nivel crítico, vemos que el número de onda vertical se incrementa (el paquete se compacta) pero, a diferencia de una onda monocromática, la amplitud de la perturbación no crece.

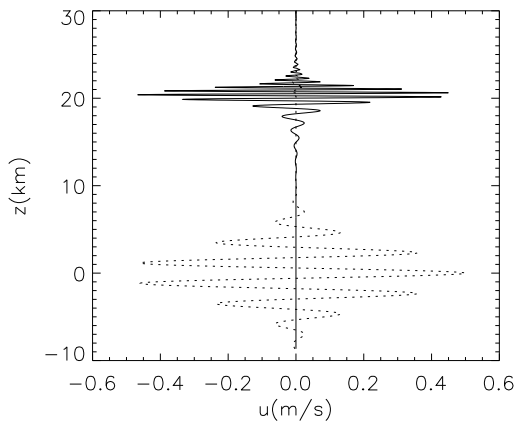


Figura 5: Perfil vertical de la perturbación del viento horizontal a tiempo  $t = 0$  (línea punteada) y a tiempo  $t = 10hs$  (línea sólida)

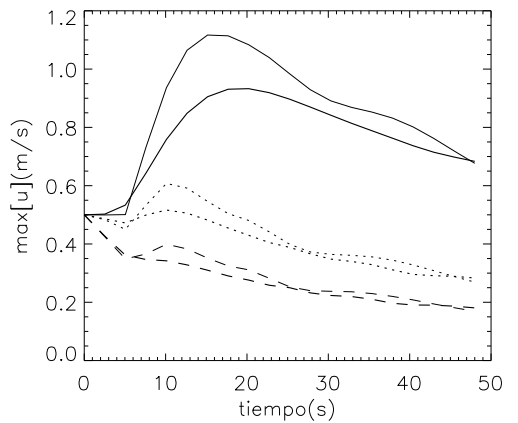


Figura 6: Evolución de la máxima amplitud de la envolvente para  $Ri = 100$  (línea fina) y  $Ri = 500$  (línea gruesa).  $\sigma = 0.04m_{0m}$  (línea continua),  $\sigma = 0.10m_{0m}$  (línea punteada),  $\sigma = 0.16m_{0m}$  (línea a trazos).

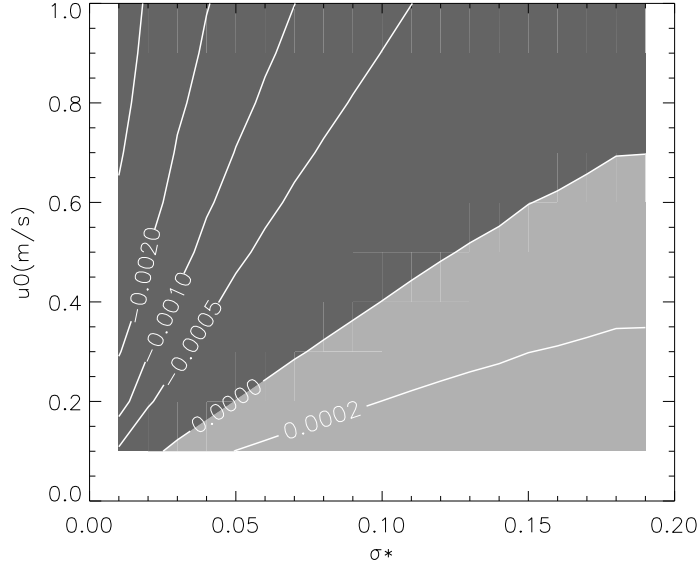


Figura 7: Variación de la frecuencia de Brunt-Väisälä total en función de la amplitud inicial y el ancho del paquete para  $Ri = 100$  y  $t = 48$  hr. El sombreado mas oscuro denota la región de inestabilidad convectiva.

A los fines de mostrar la evolución de la amplitud, en Fig. 6 mostramos el máximo de  $|u(z, t)|$  para distintos espectros iniciales y distintos valores de  $Ri$ . Observamos que, aunque en los casos menos transitorios al principio la amplitud máxima crece, en todos los casos a partir de un determinado tiempo la amplitud de la velocidad horizontal comienza a decrecer con el tiempo. En el límite del intervalo temporal ( $48hs$ ) vemos que las amplitudes tienden a igualarse para el mismo  $\sigma$  inicial y distintos  $Ri$ . El tiempo límite fue tomado en  $48hr$  porque a tiempos mayores los efectos de difusión se vuelven importantes, a punto tal de esperar que la disipación de la onda por difusión, y no por la inestabilidad convectiva, sea el proceso dominante.

Para estudiar las regiones donde la perturbación se vuelve inestable convectivamente, veamos cuando la frecuencia de Brunt-Väisälä total,  $N$ , se vuelve negativa debido a la perturbación. Por definición

$$N^2 = -\frac{g}{\theta} \partial_z \theta \quad (10)$$

Si  $\theta = \theta_0 + \theta_1$ , donde  $\theta_0$  es el valor medio de la temperatura potencial y  $\theta_1$  la perturbación, linealizando (10) y aplicando relaciones de polarización obtenemos

$$N^2 = N_0^2 + Re[iN_0 \partial_z u] \quad (11)$$

En la Fig. 7 graficamos el valor mínimo absoluto de  $N^2$  para distintos anchos espectrales y distintas amplitudes del pulso inicial, a  $t = 48hs$ . (trabajamos con resolución  $\Delta z = 5m$ ). Observamos que las ondas altamente transitorias ( $\sigma$  altos) no se han inestabilizado para tiempos largos: solo si la amplitud inicial supera un umbral, el disturbio se volverá inestable. Mientras en el caso de una onda monocromática  $\sigma \rightarrow 0$  la inestabilidad se produce para cualquier amplitud inicial.

En Fig. 8 se muestra el máximo del viento de corte  $|d_z u(z, t)|$  para distintos espectros iniciales en los casos  $Ri = 100$  y  $Ri = 500$ , este tiene valores finitos para tiempos largos

en lugar de diverger. En particular se puede notar que a menor ancho espectral menor es el viento de corte máximo.

Pulido (2005) mostró que si consideramos movimientos cuasi-horizontales ( $u \gg w$ ), la energía de la onda se aproxima a

$$W_r(t) = \rho_0 \overline{u^2} \quad (12)$$

donde la raya representa el promediado de la fase. En la Fig. 9 se muestra la energía (normalizada a 1) para  $Ri = 100$  y  $Ri = 500$  para distintos espectros ( $\sigma = 0.04m_{0m}$ ,  $\sigma = 0.16m_{0m}$ ), y se comparan los resultados del modelo numérico con la aproximación de trazado de rayos (Lighthill 1978).

$$W_r(t) = \frac{W_r(0)}{\Omega(0)} \Omega(t) \quad (13)$$

Observamos que el comportamiento de la energía es independiente del ancho del espectro inicial, y además la teoría del trazados de rayos es una buena aproximación aún en las cercanías del nivel crítico, siempre que la propagación conservativa sea válida.

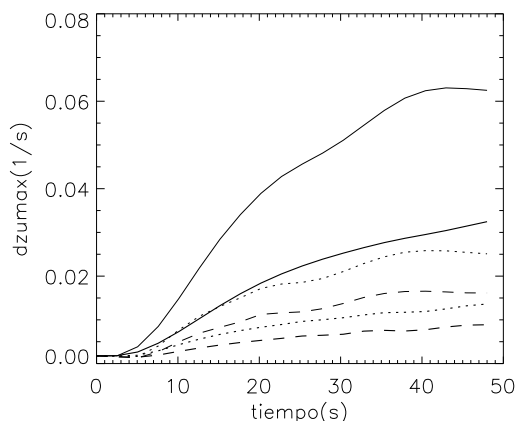


Figura 8: Evolución de la amplitud del viento de corte para  $Ri = 100$  (línea fina) y  $Ri = 500$  (línea gruesa),  $\sigma = 0.04m_{0m}$  (línea continua),  $\sigma = 0.10m_{0m}$  (línea punteada),  $\sigma = 0.16m_{0m}$  (línea a trazos)

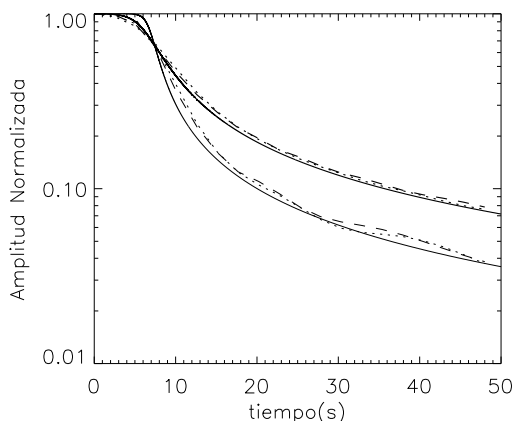


Figura 9: Evolución de la Energía:  $Ri = 100$  (línea fina) y  $Ri = 500$  (línea gruesa). La solución de (13) (línea sólida), y los resultados del modelo para  $\sigma = 0.04m_{0m}$  (línea punteada), y  $\sigma = 0.16m_{0m}$  (línea a trazos).

## 4 Conclusiones

En este trabajo se presentan simulaciones de la evolución de ondas de gravedad transitorias con un modelo lineal de alta resolución vertical. El modelo permite obtener resultados confiables en las cercanías del nivel crítico sujeto a la validez de la aproximación lineal y asumiendo la propagación conservativa de las ondas. Se muestra que tanto la energía como la amplitud máxima del disturbio decaen en su propagación hacia el nivel crítico, en contraste con los resultados para ondas monocromáticas cuya amplitud diverge en



el nivel crítico (Lindzen, 1981). Lo cual demuestra que no es una buena aproximación representar a disturbios transitorios por ondas estáticas (e.g. Alexander and Dunkerton, 1999), especialmente en las cercanías del nivel crítico donde se presentan las mayores diferencias.

Encontramos que el rol de la inestabilidad convectiva para disturbios altamente transitorios no es tan preponderante como para el caso de ondas monocromáticas, en particular para ondas de bajas amplitudes iniciales no se observan inestabilidades aún para tiempos largos. Esto sugiere que la disipación por difusión puede tener un rol preponderante en disturbios altamente transitorios.

La comparación de un disturbio simulado con alta resolución vertical, a un experimento de baja resolución vertical, muestra que existen efectos de interferencia destructiva en los altos números de onda los cuales no son modelados si no existe una alta resolución vertical que permita resolver todo el ancho del paquete (no sólo el modo principal, que en ambos experimentos es bien representado por las resoluciones utilizadas). Este falta de interferencia puede alterar significativamente los procesos involucrados con el rompimiento de ondas en los modelos dinámicos no lineales (e.g. Bacmeister and Schoeberl, 1989).

## 5 Referencias

- Alexander M. J. and T. J. Dunkerton, 1999: A spectral parameterization of mean-flow forcing due to breaking gravity waves. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 4167-4182.
- Andrews D. G. and M. E. McIntyre, 1978: On wave-action and its relatives. *J. Fluid Mech.*, **89**, 647-664.
- Bacmeister, J. T. and M. R. Schoeberl, 1989: Breakdown of vertically propagating two-dimensional gravity waves forced by orography. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 2109-2134.
- Booker, J. and Bretherton, F. 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow *J. Fluid. Mech.*, **27**, 513-539.
- Fritts, D. C., 1984. Gravity wave saturation in the middle atmosphere: A review of theory and observations. *Rev. Geophys.*, **22**, 275-308.
- Fritts, D. and Alexander, J. 2003: Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere, *Rev. Geophys.*, **41**, 3:1-64.
- Lighthill, J. 1978: *Waves in fluids*. Cambridge University Press.
- Lindzen, R. S., 1981: Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.*, **86**, 9707-9714.
- Press, W. H., Flannery, B. P. Teukolsky, S. A. and W. T. Vetterling, 1992: *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Pulido M., 2002: Spectral differences between a gravity shear wave and a continuous superposition of these modes. *Atm. Sci. Lett.*, **43**, 104-111.
- Pulido, M. 2005: On the Doppler effect in a transient gravity-wave spectrum *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **131**, 1215-1231.