

# LOS EFECTOS DE LA VISCOSIDAD EN LA DEPOSICIÓN DE MOMENTO DE ONDAS DE GRAVEDAD TRANSITORIAS

## THE EFFECTS OF VISCOSITY IN THE MOMENTUM DEPOSITION BY TRANSIENCE GRAVITY WAVES

C. Rodas y M. Pulido\*

Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) - Universidad Nacional Del Nordeste  
Av. Libertad 5470 - (3400) -Corrientes - Argentina  
*e-mail: pulido@exa.unne.edu.ar*

En este trabajo se examinan simulaciones numéricas de ondas de gravedad transitorias que se propagan en un medio viscoso hacia la región crítica. El modelo numérico utilizado para representar el disturbio tiene una alta resolución vertical (5m). El trabajo se focaliza en valores de viscosidad representativos de la media atmósfera. Se encuentra que para ciertas condiciones iniciales y de viscosidad del medio, los disturbios no alcanzan a inestabilizarse convectivamente. En estos casos la deposición de momento es gobernada por la viscosidad.

**PALABRAS CLAVES:** inestabilidad convectiva, nivel crítico, rompimiento de onda, viscosidad

Numerical simulations of transience gravity waves that are propagating toward the critical region in viscid media are examined. The numerical model represent the disturbance with a high vertical resolution (5 m). We focus on viscosity values representative of the middle atmosphere. For certain initial conditions transience disturbances do not become convectively unstable for their whole life cycle. In these cases the momentum deposition is governed by viscosity.

**KEYWORDS:** convective instability, critical level, wave breaking, viscosity

### I. INTRODUCCIÓN

Las ondas de gravedad se generan en la baja atmósfera, propagándose hacia arriba, para luego romperse en la alta estratósfera y baja mesósfera<sup>(3)</sup>. En 1981, Lindzen<sup>(4)</sup> estudió el rompimiento de las ondas de gravedad y sus efectos en el clima, demostrando que la deposición del flujo de momento de las ondas es responsable de que, en la mesósfera, el hemisferio de invierno tenga mayores temperaturas que el de verano.

La escala de las ondas de gravedad es mucho menor que la resolución de los modelos climáticos, por lo que son tenidas en cuenta en estos modelos por medio de parametrizaciones. Estudios recientes<sup>(5)</sup> mostraron que los modelos climáticos son altamente sensibles a la parametrización de ondas de gravedad utilizada.

Una de las principales limitaciones de las diferentes parametrizaciones utilizadas en los modelos climáticos es que asumen ondas de gravedad monocromáticas o estáticas, es decir, que asumen ondas generadas por fuentes permanentes. Cuando esto ocurre en el marco de la teoría lineal, la amplitud de las perturbaciones de la velocidad horizontal y de la temperatura divergen a la altura del nivel crítico, donde la velocidad de fase horizontal es igual a la velocidad del flujo medio. En general es aceptado que, a partir de que alcanza el nivel de inestabilidad convectiva, la onda disipa su energía por medio de turbulencia hasta el nivel crítico<sup>(2)</sup>. Entonces, es fundamental entender cuando un disturbio en la atmósfera

se vuelve inestable convectivamente para mejorar las parametrizaciones que utilizan el modelo lineal.

En la atmósfera, los procesos que generan las ondas de gravedad son altamente transitorios. Las ondas de gravedad generadas por un disturbio transitorio tienen una distribución continua en frecuencias, por lo cual no está bien definido el nivel crítico, sino que existe lo que podríamos denominar una región crítica, es decir un rango de alturas para el cual cada componente del disturbio encuentra su propio nivel crítico. Pulido<sup>(7)</sup> demostró que en el caso de disturbios transitorios existe una fuerte interferencia destructiva en las cercanías de la región crítica, en la cual la amplitud de la perturbación en la velocidad horizontal tiende a cero, en contraste con el caso monocromático donde la amplitud diverge.

En un estudio reciente, Pulido y Rodas<sup>(9)</sup> estudiaron los efectos de la propagación de paquetes de ondas hacia la región crítica, en una atmósfera no-viscosa y con un viento tangente hiperbólico, mediante un modelo lineal de alta resolución vertical (5m). Encontraron que disturbios altamente transitorios y de bajas amplitudes iniciales, no alcanzaban la inestabilidad convectiva aún para tiempos largos (48 hs). Por otro lado, notaron que en algunos casos la inestabilidad convectiva se producía en tiempos demasiado largos como para suponer despreciables la viscosidad y la conductividad térmica del medio.

El propósito de este trabajo es, justamente, estudiar los efectos de la viscosidad y la difusión en el rompimiento de ondas transitorias en las cercanías del nivel crítico.

\* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

Para ello se utiliza un modelo lineal, que permite modelar el disturbio con una muy alta resolución vertical (5m) y así obtener resultados en el límite de altos números de onda verticales, lo que actualmente resulta imposible con modelos dinámicos no-lineales. En particular, se estudia en que rangos de amplitud y ancho espectral, la disipación del disturbio es debida principalmente a la viscosidad y a la conductividad térmica del medio.

En este trabajo nos concentramos en los procesos de capa crítica, así que despreciamos el aumento de la amplitud de la onda debido a la disminución de la densidad con la altura.

## II. MODELO TEÓRICO

Se consideran perturbaciones adiabáticas lineales en una atmósfera que no rota, constituida de un fluido viscoso con frecuencia de flotación  $N_0$  y un viento horizontal  $U(z)$ , donde  $z$  es la altura.

Bajo la aproximación Boussinesq, se obtiene una ecuación de sexto orden para la velocidad vertical  $w$  dada por

$$D_\kappa D_\nu \nabla^2 w - d_{zz} U D_\kappa \partial_x w + N^2 \partial_{xx} w = 0 \quad (1)$$

donde  $D_\kappa = \partial_t + U \partial_x - \kappa \nabla^2$ ,  $D_\nu = \partial_t + U \partial_x - \nu \nabla^2$ ,  $\kappa$  es el coeficiente de conductividad térmica y  $\nu$  el de viscosidad cinemática.

Como  $U$  es uniforme en  $x$  y  $t$ , escribimos la solución de (1) como

$$w(x, z, t) = w_1(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (2)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia absoluta y  $k$  es el número de onda horizontal.

Sustituyendo (2) en (1), y despreciando los términos que contienen  $d_z U$  y  $d_{zz} U$ , obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^6 w_1}{dz^6} - i \frac{(\kappa + \nu)}{\kappa \nu} (\omega - kU) \frac{d^4 w_1}{dz^4} - \frac{(\omega - kU)^2}{\kappa \nu} \frac{d^2 w_1}{dz^2} - \frac{N_0^2 k^2}{\kappa \nu} w_1 = 0 \quad (3)$$

Las condiciones de contorno de la atmósfera permiten modos continuos. Entonces, la solución general de la ec. (1) es obtenida a través de una integral doble de Fourier en  $\omega$  y  $k$ :

$$w(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \tilde{w}(k, \omega, z) e^{i(\omega t - kx)} dk d\omega \quad (4)$$

donde  $\tilde{w}(k, \omega, z)$  es la solución de la ec (3) para  $\omega$  y  $k$  particulares.

A partir de las ecuaciones de conservación de la temperatura potencial y de la masa, se obtienen la perturbación de la temperatura potencial y velocidad horizontal respectivamente.

## III. MODELO NUMÉRICO

El modelo numérico representa a la solución  $w(x, z, t)$ , usando el método espectral en  $x$  y  $t$ . Luego,  $\tilde{w}(k, \omega, z)$  se obtiene resolviendo numéricamente la ecuación (3) como se describe a continuación.

La ecuación (3) es representada por un sistema de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden. Este sistema puede ser representado como

$$d_z \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz compleja de 6x6 dependiente de la altura, e  $\mathbf{y}$  es un vector. El sistema tiene seis soluciones linealmente independientes: cuatro corresponden a modos viscosos y dos a modos ondulatorios.

Este sistema es difícil de resolver numéricamente por los métodos tradicionales, porque involucra soluciones con muy diferentes escalas de altura. Generalmente, a este tipo de problema se lo denomina "stiff problem"<sup>(6)</sup>. Por otro lado, dos de los modos viscosos del sistema crecen exponencialmente con la altura, de forma tal que pequeños errores que se proyectan sobre estos modos terminan dominando la solución.

Para evitar los problemas numéricos que acarrearán los modos viscosos, se resuelve el sistema (7) mediante el siguiente esquema. En cada paso  $z_i \rightarrow z_{i+1}$ , con  $z_{i+1} = z_i + \Delta z$ , se evalúan las componentes de la matriz  $\mathbf{A}$  en  $z_i$  y se la considera constante en el intervalo  $[z_i, z_i + \Delta z]$ . Luego se calculan los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  mediante un esquema que conserva el flujo de momento vertical entre los intervalos  $\Delta z$  (cuando  $\nu$  y  $\kappa \rightarrow 0$ ). Las proyecciones en los modos viscosos o de propagación hacia abajo son filtrados. Una vez obtenida la solución del modo,  $\tilde{w}(k, \omega, z)$  se compone a través de (4).

## IV. DISEÑO DE LOS EXPERIMENTOS

En la frontera inferior  $z=0$ , se considera una fuente de ondas de gravedad que radia un paquete de amplitud máxima inicial  $u_0$ , con espectro Gaussiano<sup>(8)</sup> de ancho espectral  $\sigma$  y número de onda vertical central  $m_{0m}$ . Se puede pensar en una membrana localizada en el plano horizontal  $z=0$ , la cual está vibrando y generando perturbaciones. Un caso particular de las velocidades horizontal y vertical en  $z=0$  generadas por esta fuente se muestra en la figura 1-a.

Una vez que el disturbio comienza a ser radiado desde la fuente, se propaga hacia arriba en un medio que está caracterizado por una frecuencia de Brunt-Väisälä constante ( $N_0 = 0.02 s^{-1}$ ), un viento medio de la forma  $\tanh$ <sup>(8)</sup> (ver fig. 1-b) y un número de Richardson mínimo ( $Ri_{min} \equiv \frac{N_0^2}{dU}$ ) igual a 100.

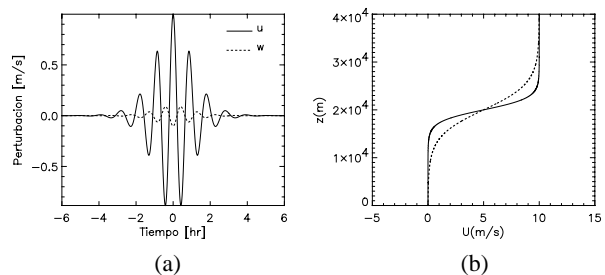


Figura 1: a) Forzado ondulatorio en  $z=0$ : velocidades de la perturbación horizontal (línea sólida) y de la perturbación vertical (línea punteada); b) Perfil vertical del viento medio para  $Ri_{min}=100$  (línea sólida) y  $Ri_{min}=500$  (línea punteada).

Se utilizaron valores de  $\nu$  y  $\kappa$  representativos de la media atmósfera:  $\nu = \kappa = 10^{-2} m^2 s^{-1}$  corresponde a los 48km de altura, y  $\nu = \kappa = 5 \times 10^{-2} m^2 s^{-1}$  a los 60km<sup>(10)</sup>. A lo largo del trabajo, cuando se haga referencia a la viscosidad, también se estará haciendo referencia, en forma implícita, a la conductividad térmica.

A los fines de comparar los casos viscosos con casos sin viscosidad ( $\nu = \kappa = 0$ ), se presentan en algunas figuras los resultados del modelo descrito en Pulido y Rodas<sup>(9)</sup>.

Dado que el interés principal del trabajo es analizar el comportamiento del paquete en las cercanías de la región crítica, tanto  $\sigma$  como  $m_{0m}$  (correspondiente a una longitud de onda  $\lambda_{0m} = 2.36 km$ ) del paquete gaussiano fueron elegidos de forma tal que la mayor parte de los modos comprendidos en el intervalo  $[m_{0m} - \sigma, m_{0m} + \sigma]$  alcanzan su nivel crítico<sup>(9)</sup>.

## V. RESULTADOS

La evolución de un paquete gaussiano en un medio viscoso muestra que, cuando el disturbio se acerca a la región crítica, el paquete se compacta espacialmente y los números de onda verticales crecen (fig. 2).

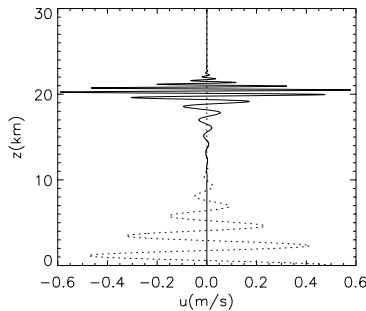


Figura 2: Perfil vertical de una perturbación horizontal, de ancho espectral  $\sigma = 0.10 m_{0m}$  en  $t = 0hs$  (línea punteada) y  $t = 12hs$  (línea sólida), para un medio con  $\nu = \kappa = 10^{-2} m^2 s^{-1}$  y  $Ri = 100$ .

A tiempos mayores a 12hs, la amplitud máxima de la envolvente del paquete se atenúa más rápidamente para valores de  $\nu$  y  $\kappa$  crecientes, independientemente del ancho del paquete (fig. 3).

La evolución de la energía también muestra que, a partir de las 12hs, la tasa de disipación de la energía es mayor cuanto mayor es la viscosidad (ver fig.4). La energía de la onda ( $W_r$ ) fue determinada a partir de

$$W(t) = \rho_0 \overline{u^2} \quad (10)$$

donde  $\overline{u^2}$  representa el promedio del cuadrado de la velocidad en una fase de  $2\pi$ , y donde se tiene en cuenta que el modelo considera movimiento cuasi-horizontales<sup>(8)</sup>.

Lo analizado hasta aquí muestra que las diferencias entre casos con distinta viscosidad se vuelven importantes a partir de las 12hs, tiempo en que los modos principales del paquete ya se encuentran en la región crítica (ver fig.2). Estas diferencias se deben a que el efecto disipativo de la viscosidad es potenciado por el crecimiento en los números de onda verticales del paquete.

El disturbio inestabiliza convectivamente al flujo cuando  $N^2 < 0$  ( $N$  es la frecuencia de Brunt-Väisälä total). En el modelo lineal, reteniendo sólo los términos hasta primer orden,

$$N^2 = N_0^2 + \text{Re}[iN_0 \partial_z u] \quad (9)$$

Es importante destacar que tanto el modelo numérico descrito en este trabajo como el de Pulido y Rodas<sup>(9)</sup>, son válidos para describir el comportamiento del disturbio hasta que  $N^2$  se vuelve negativo. A partir de allí, los valores de  $N^2$  deben ser tomados sólo como tendencias del modelo lineal, aunque sean positivos.

Los casos viscosos muestran que  $N^2$  tiene un mínimo al evolucionar, en contraste con los casos no viscosos estudiados en Pulido y Rodas<sup>(9)</sup> donde se observa una disminución continua de  $N^2$  (fig. 5).

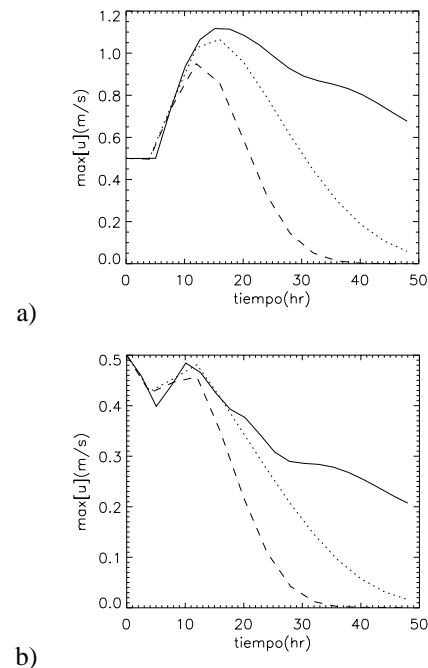


Figura 3: Evolución de la máxima amplitud de la envolvente para a)  $\sigma = 0.04 m_{0m}$  y b)  $\sigma = 0.13 m_{0m}$ . Se muestran casos con  $\nu = \kappa = 10^{-2}$  (línea punteada) y  $\nu = \kappa = 5 \times 10^{-2}$  (línea a tazos). La línea sólida corresponde al caso  $\nu = \kappa = 0$  (Pulido y Rodas<sup>(9)</sup>).

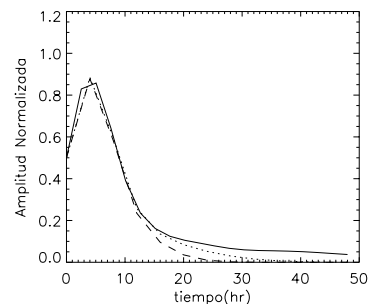


Figura 4: Evolución de la energía normalizada  $W(t)/W(0)$  para  $\sigma = 0.04 m_{0m}$ . Se muestran casos con  $\nu = \kappa = 10^{-2}$  (línea punteada) y  $\nu = \kappa = 5 \times 10^{-2}$  (línea a trazos). La línea sólida corresponde al caso  $\nu = \kappa = 0$  (Pulido y Rodas<sup>(9)</sup>). El crecimiento inicial se debe a que en  $t = 0$  solo la mitad del paquete se encuentra en el dominio de análisis y a medida que transcurre el tiempo aparece el resto.

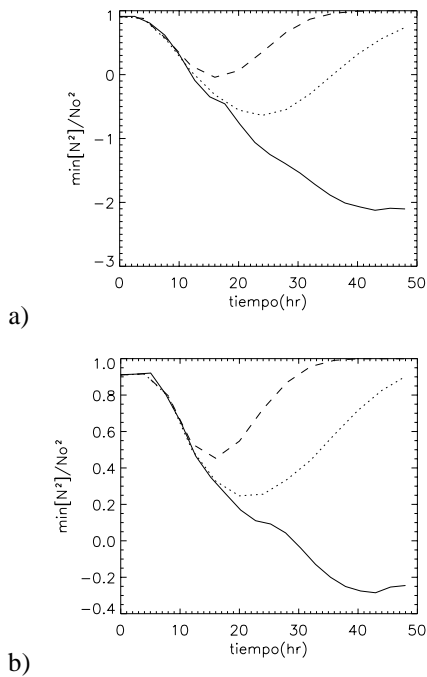


Figura 5: Evolución del mínimo entre [0,30km] de  $(N/N_0)^2$ : a)  $\sigma=0.04m_{0m}$  y b)  $\sigma=0.10m_{0m}$ . Se muestran los casos  $v=\kappa=10^{-2}$  (línea punteada) y  $v=\kappa=5 \times 10^{-2}$  (línea a trazos). La línea sólida corresponde al caso  $v=\kappa=0$  ( Pulido y Rodas<sup>(9)</sup>).

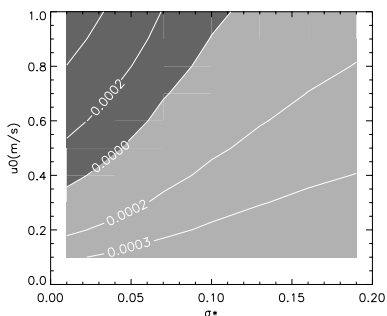


Figura 6: Mínimo absoluto de  $N^2$  en el rango de altura [0,30km] y en el intervalo de tiempo [0hs, 48hs] para distintos  $\sigma^* = \sigma/m_{0m}$  y  $u_0$  (amplitud inicial), para el caso con  $v=\kappa=5 \times 10^{-2}$ . El sombreado más oscuro denota las condiciones iniciales que alcanzan la inestabilidad convectiva, y el más claro las que no.

La existencia de un mínimo absoluto de  $N^2$  positivo demuestra que el disturbio nunca inestabiliza al flujo convectivamente. Para estos casos, el disturbio se disipará exclusivamente por viscosidad.

Disturbios muy transitorios no inestabilizan al flujo, aún para amplitudes grandes, como lo muestra la figura 6. Esta figura puede ser tomada como un diagrama de inestabilidad. Los disturbios que se encuentra en la zona sombreada con tonos oscuros son los que se inestabilizan convectivamente.

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan simulaciones numéricas de la evolución de ondas de gravedad transitorias, en un medio viscoso, con un modelo lineal de alta resolución vertical. El modelo numérico permite obtener resultados

confiables en las cercanías del nivel crítico sujetos a la validez de la teoría lineal. El esquema numérico propuesto permite el cálculo de la propagación de ondas sin los reconocidos problemas numéricos que acarrear los modos viscosos que crecen con la altura<sup>(1)</sup>.

Se muestra que tanto la energía como la amplitud máxima del disturbio decrecen durante su propagación hacia los niveles críticos. El decrecimiento es más rápido cuando mayor es la viscosidad.

La interferencia destructiva que ocurre en las cercanías de la región crítica, sumado al efecto disipativo de la viscosidad del medio, impiden que la onda alcance el límite de inestabilidad convectiva para disturbios muy transitorios. En estos casos, la disipación por viscosidad es la dominante.

Estos resultados pueden ser de utilidad para las parametrizaciones usadas en modelos climáticos ya que relaciona de una manera simple las condiciones iniciales del disturbio y el estado básico del medio con los procesos de disipación del disturbio. Obviamente, estos procesos disipativos son los que determinan la forma en que las ondas fuerzan al flujo medio.

Los valores de  $v$  y  $\kappa$  utilizados, y la naturaleza transitoria de los disturbios atmosféricos, permiten especular que, a alturas mesosféricas, los procesos disipativos debidos a la viscosidad y conductividad térmica del medio, tienen un rol más significativo en la deposición de momento de la onda al flujo medio que el que actualmente se le asigna.

## Referencias

1. Fuà, D. and Einaudi F.: On the effect of dissipation on Shear Instabilities in the Stable Atmospheric Boundary Layer. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 888-900. (1984)
2. Fritts, D. C: Gravity wave saturation in the middle atmosphere: A review of theory and observations. *Rev. Geophys.*, **22**, 275-308. (1984)
3. Fritts, D. and Alexander, J.: Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Rev. Geophys.*, **41**, 3:1-64. (2003)
4. Lindzen, R. S.: Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Gheophys. Res.*, **86**, 9707-9714.(1981)
5. Pawson, S. and others: The gcm\_reality intercomprison project for sparc (grips): Scientific issues and initial results. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **81**, 781-796 (2000)
6. Press, W. H., Flannery, B. P. Teukolsky, S. A. and W. T. Vetterling. "Numerical Recipes in Fortran". Cambridge University Press, Cambridge.(1992)
7. Pulido, M.: Spectral differences between a gravity shear wave and a continuous superposition of these modes. *Atm. Sci. Lett.*, **43**, 104-111.(2002)
8. Pulido, M.: On the Doppler On the Doppler effect in a transient gravity-wave spectrum. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **131**, 1215-1231.(2005)
9. Pulido M. y Rodas C.: La inestabilidad convectiva en ondas de gravedad transitorias. CONGREMET IX. (2005)
10. U. S. Standard Atmosphere Supplements, U.S. Government Printing Office, Washington, D. C.(1964)